Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 18, No 1. Agosto − Febrero, 2018 ISSN 1659 -0643

La dimensión del control en la regla producto en problemas de conteo

Félix Núñez V.
fnunez@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Universidad de Costa Rica

Giovanni Sanabria B.
gsanabria@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Universidad de Costa Rica

Recibido: Setiembre 8, 2016 Aceptado: Marzo 15, 2017

Resumen. Cuando se realiza la solución de un problema de conteo, por lo general queda la sensación de si se habrá hecho correctamente. Lo anterior se debe entre otros aspectos a que en muchas ocasiones, la solución dada carece del rigor con que se resuelven problemas de otros dominios de la matemática. Cuando estos problemas se resuelven con la rigurosidad matemática, se monitorea el proceso de solución en cada etapa, y se cubren todos los ángulos. Este control, una de las dimensiones que agrega Shoenfeld a las heurísticas que brinda Polya por considerarlas insuficientes para resolver ciertos problemas matemáticos, es sumamente importante en la realización de un correcto conteo y disminuye, o elimina, esa sensación de inseguridad en la solución dada. Empero, en los niveles iniciales, este abordaje no se ajusta, dado que los estudiantes carecen de los conocimientos matemáticos que podrían intervenir en la solución de estos problemas. Una forma alternativa de tener el control del proceso de resolución de ciertos problemas de conteo, es a través de una correcta interpretación y aplicación de la regla del producto. En este trabajo, se exponen una manera de desarrollar la heurística y el control en los estudiantes para resolver ciertos problemas de conteo por medio de la regla del producto. Finalmente, brindaremos un ejemplo de una incorrecta aplicación de esta técnica dada por algunos estudiantes del curso de Métodos Estadísticos de la Carrera de EMAC del Tecnológico de Costa Rica, y la estrategia para advertirlos del error subyacente, mediante una correcta interpretación de la regla del producto.

Palabras clave: Regla del producto, conteo, control, inclusión-exclusión, heurísticas.

Abstract. Usually, when we have to solve a problem counting, we feel the sensation if we have considered all cases. This happened since the way of resolve this kind of exercises lacks mathematical formality that is in other mathematical domains. Solving this problems with this mathematical formality give us certainness and control of what we are going to make in each step. This control is very important in the resolution problems counting, and it is a dimension Shoenfeld gives to teachers in his work about mathematical problem solving, trying to improve the Polya works on how to solve problems, for considering this heuristics incomplete to make sure the resolve of many other kinds of problems. Nevertheless, this focus way is not adjustable during initial levels, since many students don't have necessary knowledge to proceed this way. An important alternative to have control in solve counting problems has to do with a correct interpretation and application of the product rule. In this paper, it is exposed a way to develop the heuristic and control in students in order to help them to resolve a kind counting problems, through product rule. Finally, we give an example of the incorrect using this rule, made for some students of a math course called Statistics Methods, from the career EMAC, Technological of Costa Rica, and how we have advised them about their mistakes through a correct application of product rule.

KeyWords: Product rule, counting, control, inclusion-exclusion, heuristics.

1.1 Introducción

Es conocido el hecho de que los problemas de conteo se caracterizan por ser difíciles y además porque, cuando se da la solución a uno en particular, queda la inquietud de si se habrá resuelto correctamente. Lo anterior se debe, por lo general, a que la solución que se les da es bastante intuitiva, y pareciera que no se tiene control sobre el proceso de resolución. En Núñez (2007[1]) habíamos comentado que una forma de evitar esta situación es resolver este tipo de ejercicios de manera más rigurosa, tal como se hace en matemáticas, por lo menos a nivel universitario, en donde se tenga dominio y control de lo que se va haciendo.
La regla del producto es, en muchos casos, una regla difícil de utilizar adecuadamente, y en general los problemas de conteo sueles ser difíciles de resolver incluso para estudiantes avanzados (Roa, 2000[3]).

Por otro lado, cuando un estudiante tiene un error en la solución de un determinado problema de conteo, es difícil para el profesor hacerle ver dónde está el error, justamente por la forma en que se suelen resolver estos problemas. Mencionábamos entonces que resolver de manera rigurosa este tipo de ejercicios permite a su vez dos asuntos: el control sobre la solución y la explicación a los estudiantes sobre el mal conteo que se pudo haber hecho en un determinado problema.

No obstante, la resolución de este tipo de problemas vista de manera rigurosa, podría demandar mucho tiempo y requerirá de conocimientos matemáticos avanzados. En Núñez (2007[1]) planteamos el siguiente problema:

> ¿Cuál es el número de aplicaciones sobreyectivas de un conjunto E que tiene n+1 elementos en uno F que contiene n elementos?

Se realizó la solución de dos maneras, una usual y la otra rigurosa.

La manera usual presentada en Núñez (2007[1]), indica que, bajo estas circunstancias, una función f de E en F es sobreyectiva si y sólo si un elemento de F y sólo uno admite dos preimágenes y todos los demás elementos de F admiten sólo una preimagen. Entonces por la regla del producto se obtiene que, el total de funciones sobreyectivas de E en F corresponde a: $nC\,(n+1,2)\,(n-1)! = n\,(n+1)!/2$.

Por otro lado, la forma rigurosa presentada en Núñez (2007[1]) no es sencilla ni escueta, sino que es más compleja que la usual y requiere del dominio de ciertos conceptos y teoremas de teoría de conjuntos, de funciones, que a un nivel introductorio, posiblemente sea difícil que nuestros estudiantes posean.

Por ejemplo, está implícito el concepto de partición, teoremas sobre cardinalidad de conjuntos, funciones de un conjunto en otro que a su vez es un conjunto de funciones.

Ciertamente, abordar un problema de conteo con el rigor que se hace en otros dominios de la matemática, brinda control y tranquilidad en el proceso de solución, porque cada aspecto está debidamente contemplado. ¿Qué hacer entonces?

1.2 La resolución de problemas y los problemas de conteo

Como mencionamos anteriormente, un aspecto complejo que atañe a los docentes en este tipo de problemas consiste en hacerle notar al estudiante el error en un conteo. En otro tipo de problemas matemáticos, el juego de cuadros nos puede ayudar a resolver una determinada situación. Cuando un estudiante no entiende una determinada explicación, podemos usar el cuadro algebraico, o geométrico o el analítico, pero en este tipo de tópicos, no parecen viables estas opciones, aunque sí podríamos usar programación; realizar un programa computacional que genere todos los casos posibles y observar cuáles son, será una herramienta muy útil en estos casos, porque se confrontarían los resultados obtenidos en un conteo con los generados en el programa. En ese sentido, se tendría una herramienta para convencer a los estudiantes del conteo incorrecto o de que contó bien, mas en el caso de que hubiera un conteo incorrecto, cómo atinarle al error. Todo esto no es tarea fácil.

El control de la solución es clave en este tipo de problemas, al igual que lo es la intuición, que los docentes deben preocuparse por educarla en sus estudiantes. Polya (1965[2]) sugiere que para intentar resolver un problema, el individuo debe enfrentarse a las siguientes cuatro etapas: Comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. En su trabajo ”Cómo plantear y resolver problema” (Polya, 1965[2]), introduce la necesidad de educar nuestra intuición para desarrollar heurísticas que nos permitan resolver problemas. Ese arte o ciencia de resolver problemas mediante la creatividad debe desarrollarse, por ello, tratando de enseñar a sus estudiantes cómo abordar un problema, desarrolla una serie de procedimientos heurísticos con los que podrían tener éxito en la solución del mismo. Por ejemplo, él sugiere, que cuando no se comprenda un determinado problema, cuando proceda, se dibuje una figura o se busque un problema similar, es decir, se piense heurísticamente, lo cual está ligado a un razonamiento no definitivo ni riguroso, sino provisional y plausible, cuyo fin es encontrar la solución del problema. Por lo general, este razonamiento se asocia con la inducción o la analogía. También sugiere atacar un problema más general, a esto Polya lo llama la paradoja del inventor, en el sentido de que un plan más ambicioso puede ser también el mejor.

No obstante, una vez ideado el plan de solución y ejecutado, debe examinar la solución obtenida. Mediante las preguntas ¿Puede comprobar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?, Polya señala que una buena respuesta a estas preguntas, reafirman la confianza en la exactitud de la solución encontrada para el problema dado.

En el caso de resultados numéricos de problemas matemáticos, Polya sugiere, dentro de sus recomendaciones heurísticas, que se comparen dichos resultados con números fáciles de observar y que el sentido común acepte como apropiados.

Cuando en su recomendación pide que se verifique el razonamiento empleado para resolver un determinado problema, hace un llamado a que, si dicha revisión se hace paso por paso, se realice sin caer en la mera repetición, por el hastío que puede producir esa conducta y porque bajo las mismas circunstancias, donde alguien se ha equivocado una vez, es muy posible volver a equivocarse. Si se considera necesario revisar el razonamiento paso por paso, él sugiere que por lo menos se cambie el orden en que han sido agrupados, introduciendo cambios.

Por otro lado, Schoenfeld (1985[4]) indica que esta propuesta de Polya es insuficiente para resolver cierta clase de problemas matemáticos, y lleva a cabo una serie de investigaciones en las que concluye que las heurísticas planteadas por Polya no son suficientes para tener éxito en la resolución de problemas. Él dice que sin los conocimientos previos de los estudiantes, sin la habilidad para monitorear y evaluar el proceso de resolución del problema y sin un sistema de creencias sobre lo que es conocer y hacer matemática, no se podría llegar a solucionar un determinado problema. Por ello él agrega tres dimensiones más a la propuesta de Polya, a los cuales se les debe poner atención: *Recursos* (conocimientos previos), *Control* y el *Sistema de Creencias*.

Esta habilidad para monitorear y evaluar el proceso de resolución de un problema de conteo, al que Schoenfeld llama control, es primordial aquí.

Las sugerencias que da Polya sobre que se comparen dichos resultados con números fáciles de observar y que el sentido común acepte como apropiados, son muy válidas en la resolución de problemas de conteo. El asunto aquí sin embargo, es que se puede descubrir que hay un error en la solución, pero encontrarlo es una tarea a veces difícil.

En este tipo de problemas, no se trata solamente de no entender un determinado procedimiento aplicado por el profesor, sino más bien el de hacer ver al estudiante por qué la solución que da, al parecer correcta desde un punto de vista intuitivo, tiene una componente equivocada, y en qué consiste.

Además, es poco didáctico cuando el docente en lugar de ayudar al estudiante a hallar el error, le da la solución correcta.

Verificar el razonamiento aplicado paso a paso, una vez hecha la solución, ayudará a encontrar el error en caso de que lo haya, o bien, reforzará la confianza de que la solución dada es la correcta. Este verificar se parece al control del que habla Shoenfeld, de tal manera que articulando ambas propuestas, se enriquece el acervo de heurísticas para un abordaje adecuado de un problema de conteo. Sin embargo, ¿cómo lograr ese control en los problemas de conteo? ¿Cómo evitar que el estudiante caiga en el juego de su intuición y que al verificar sus pasos simplemente reafirme lo que su intuición le dijo?.

De acuerdo a lo anterior, nos centraremos en dos dimensiones de los problemas de conteo: la heurística y el control. El presente trabajo solo abordará estas dimensiones para los problemas de conteo que se resuelven con la regla del producto. Este trabajo será completado con otros encaminados a la resolución de problemas de conteo en general.

1.3 Heurística en la regla del producto

La regla del producto es un teorema en teoría de combinatoria que establece que la cardinalidad de productos de conjuntos es igual al producto de las cardinalidades de los conjuntos. Es decir:

Teorema (Regla del producto)

Sean $E_1, E_2, ..., E_k$ conjuntos finitos. Se tiene que $|E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k| = |E_1| \cdot |E_2| \cdot \ldots \cdot |E_k|$

El teorema por sí solo es un resultado que nos sirve para contar los elementos del conjunto producto. Pero para lograr aplicarlo debemos definir los conjuntos que componen este conjunto producto.

La primera pregunta que surge es ¿para qué contar elementos de un conjunto producto? Los elementos de un conjunto producto conforman una lista ordenada donde cada entrada de la lista pertenece a un conjunto con cierta característica, como podemos apreciar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1

Juan tiene tres pantalones de diferentes colores: Azul, Negro y Café. Además tiene dos camisas, una de manga larga y otra de manga corta. ¿De cuántas formas puede vestirse Juan?
Sea E_1 el conjunto de pantalones y E_2 el conjunto de camisas:

$$E_1 = \{\ \text{Azul, Negro, Café}\ \}, E_2 = \{\ \text{Manga larga, Manga corta}\ \}$$

Cada manera de vestirse lo podemos ver como una lista de dos entradas donde la primer entrada indica el pantalón a ponerse y la segunda entrada indica la camisa. Es decir, una manera de vestirse es un elemento de la forma:

(Pantalón, camisa)

Note que el conjunto de maneras de vestirse es $E_1 \times E_2$. De acuerdo a la Regla del Producto, el número de maneras de vestirse es:

$|E_1 \times E_2| = |E_1| \cdot |E_2| = 3 \cdot 2 = 6$

En efecto, note que:

$E_1 \times E_2$ = { (Azul, Manga larga), (Azul, Manga corta), (Negro, Manga larga), (Negro, Manga corta), (Café, Manga larga), (Café, Manga corta)}

El ejemplo anterior evidencia que la aplicación de la Regla del producto formalmente no es tan fácil. Se necesita una manera más sencilla y sistemática de aplicarla. La idea es que este teorema en acto se convierta en una poderosa herramienta, una heurística para resolver problemas de conteo.

En Sanabria (2012[5]) se define el "Esquema por Etapas" como una creación didáctica que permite la aplicación sistemática de la Regla del Producto. Este esquema es parte de la heurística buscada:

Esquema por Etapas

Si la realización de un proceso se divide en k etapas, y si consideramos a E_1, $E_2, \ldots, E_k$ como el conjunto de maneras de realizar la etapa 1, etapa 2, etapa 3,..., etapa k, respectivamente y supongamos que:

Etapa 1: hay $n_1 = |E_1|$ maneras de realizarla.

Etapa 2: hay $n_2 = |E_2|$ maneras de realizarla.

$\vdots$

Etapa k: hay $n_k = |E_k|$ maneras de realizarla. Entonces el total de maneras de realizar el proceso completo es $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$

La heurística no es solo aplicar el esquema anterior a la primera, parte de la heurística es desarrollar la habilidad para definir las etapas y su orden de forma que el conteo sea exitoso, considerando que:

- Para determinar las maneras de realizar la etapa enésima, se asume que se realizaron las etapas anteriores (etapa 1, etapa 2,... etapa $(n-1)$).

- Como el orden de los factores no altera el producto, entonces, el orden de las etapas no influye en el resultado. Sin embargo, esto no significa que el orden de las etapas es irrelevante para el conteo; por el contrario, como el orden no influye, se debe buscar aquel que permita un conteo más simple. Por lo general, se recomienda ubicar al inicio las etapas con más restricciones.

Ejemplo 1.2

Cuántos números de cuatro dígitos se puede formar con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7, si:

1. No se pueden repetir los números.

   Considere las siguientes etapas del proceso de creación de uno de estos números:

   Etapa I: Se elige el primer dígito: hay 7 maneras.

   Etapa II: Se elige el segundo dígito: hay 6 maneras.

   Etapa III: Se elige el tercer dígito: hay 5 maneras.

   Etapa IV: Se elige el cuarto dígito: hay 4 maneras.

   Por el principio del producto, se forman $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ números de cuatro dígitos distintos.

2. No se pueden repetir los números y el dígito de las centenas es impar.

   El proceso de formación de estos números se puede dividir en las siguientes etapas:

   Etapa I: Se elige el tercer dígito (dígito de las centenas): hay $|\{1,3,5,7\}| = 4$ maneras

   Etapa II: Se elige el primer dígito: hay 6 maneras.

   Etapa III: Se elige el segundo dígito: hay 5 maneras.

   Etapa IV: Se elige el cuarto dígito: hay 4 maneras

   Así, se pueden formar $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 480$ números de cuatro dígitos bajo las condiciones solicitadas.

   Aquí, la etapa más restrictiva es ”elegir el dígito de las centenas”, y se ubicó al inicio. Si esta etapa se coloca en otra posición, el conteo se complica.

Considérese ahora el ejemplo mencionado en nuestra introducción.

Ejemplo 1.3

¿Cuál es el número de aplicaciones sobreyectivas de un conjunto E que tiene $n+1$ elementos en uno F que contiene n elementos?

Note que una función f de E en F es sobreyectiva si y sólo si un elemento de F y sólo uno admite dos preimágenes y todos los demás elementos de F admiten sólo una preimagen.
Entonces el proceso de formar una función de E en F sobreyectiva consta de las siguientes etapas:

Etapa 1: Se elige el elemento en F que admite dos preimágenes: hay n posibilidades.

Etapa 2: Se escogen los dos elementos de E que serán preimágenes del elemento de F escogido en la etapa1: hay $C(n+1,2)$ maneras

Etapa 3: Se asignan las imágenes de los $n-1$ elementos restantes de E: hay $(n-1)!$ maneras

Por la regla del producto se obtiene que, el total de funciones sobreyectivas de E en F corresponde a: $nC(n+1,2)(n-1)! = n(n+1)!/2$.

1.4 Control en la regla del producto

La enseñanza de la regla del producto a través de la heurística que incluye el esquema de etapas, permite también tener un mejor control sobre los elementos involucrados, y a la vez, se tiene una herramienta sistemática para resolver ciertos problemas de conteo.

Sin embargo, suele pasar que el estudiante confía ciegamente en las etapas en que divide el proceso. Y pesé a que revise lo realizado, generalmente se concentra en la revisión de los cálculos del conteo de las maneras de realizar cada etapa y en ver si le faltó un detalle a considerar en una etapa debido a las etapas anteriores. En su control, no considera que las etapas estén mal definidas. Pero ¿Cómo detectar que las etapas están mal definidas?

Aquí entra en juego un aspecto medular de la regla del producto, y es quizá lo que nos permitirá, en estos niveles, tener un control para monitorear y evaluar el proceso. Al dividir el proceso en k etapas y al definir los conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ como el conjunto de maneras de realizar cada etapa respectivamente, una forma de realizar todo el proceso es equivalente a obtener el único elemento del conjunto $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$. Lo anterior quiere decir que, dado un caso particular (una manera), debe existir una *combinación única* de los valores de las etapas definidas, mediante las cuales se obtenga dicho caso.

Así, parte de evaluar y monitorear el proceso de un conteo por etapas, es valorar si cada manera particular se puede obtener tomando un único valor del conjunto de valores posibles de cada etapa.

Ejemplo 1.4 (Error de conteo)

Se tienen cuatro confites (un frutini, un morenito, una tapita y un caramelo) que serán repartidos entre María y Francisco, bajo la condición de que a ella le correspondan al menos dos confites. ¿Cuántas maneras hay para repartirlos?

La forma de dividir el proceso de repartición de confites en las siguientes etapas genera un error de conteo:

Etapa I: Se elige dos confites para María: hay 6 maneras (pues de fijo le corresponden dos). Las maneras son: $\{f,m\}, \{f,t\}, \{f,c\}, \{m,t\}, \{m,c\}, \{t,c\}$

Etapa II: Se reparten los confites restantes: hay 4 maneras. Como se asume la etapa I, faltan dos confites, A y B, para repartir. Las maneras son:

#	Confites para María	Confites para Francisco
1	confites A y B	ninguno
2	confite A	confite B
3	confite B	confite A
4	ninguno	confites A y B

Total: $6 \cdot 4 = 24$ maneras (Incorrecto)

Seguidamente se verifica el error de conteo. Una manera para realizar el proceso es que a Francisco le toque la tapita y a María el resto. Esta manera es generada por más de una combinación de valores de las etapas definidas anteriormente, dos de ellas son:

	Combinación 1	Combinación 2
Etapa I.	María se le da m y c	María se le da f y c
Etapa II.	María se le da f Francisco se le da t	María se le da m Francisco se le da t

Así, valores diferentes en las etapas generan el mismo resultado; por lo tanto, hay maneras de realizar el proceso que se están contando más de una vez.

Una forma de solucionar correctamente este problema consiste en considerar tres casos:

Caso 1: María le corresponden exactamente 2 confites: hay $C(4,2) = 6$ maneras

Caso 2: María le corresponden exactamente 3 confites: hay $C(4,3) = 4$ maneras

Caso 3: María le corresponden exactamente 4 confites: hay una manera

Por lo tanto, el número de maneras de repartir los confites es 11.

1.5 Experiencias a nivel universitario

En el año 2016, se les planteó a un grupo de estudiantes de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática asistida por Computadora que matricularon el curso Métodos Estadísticos, el siguiente problema:

Ejemplo 1.5

En una determinada institución educativa, hay 16 grupos de sétimo, 11 grupos de octavo y 9 de noveno. ¿De cuántas maneras podemos elegir cinco grupos de modo que se tenga al menos uno

de cada nivel?
Los estudiantes ya habían visto la regla del producto y el principio de inclusión y exclusión también.
La solución que dieron varios estudiantes fue la siguiente:

Etapa1: Se elige un grupo del nivel de Sétimo: $C(16,1) = 16$

Etapa2: Se elige un grupo del nivel de Octavo: $C(11,1) = 11$

Etapa3: Se elige un grupo del nivel de Noveno: $C(9,1) = 9$

Etapa4: Se eligen los dos grupos restantes: $C(33,2) = 528$

Por la regla del producto, el total de maneras de elegir a los grupos de manera que se escoja al menos uno de cada nivel sería: $16 \times 11 \times 9 \times 528 = 836352$

Analizando la solución que dieron, pareciera correcta. Veamos: Con la etapa 1, se aseguran que haya 1 de sétimo año, en la etapa 2, se asegura que haya uno de octavo y en la etapa 3, de fijo habrá uno de noveno. Hasta aquí llevan 3 grupos. Faltan 2, los cuales en la etapa 4, los toman de los 33 restantes.
Parece muy natural esta solución, sin embargo es incorrecta. ¿Cómo hacerles ver que hay un error? Algunos otros estudiantes preguntaron cuál es el error, ellos también vieron una solución plausible. Sin embargo, la solución de este problema es la siguiente:

Sea U el conjunto de maneras de elegir cinco grupos de entre los 36 que se disponen.
Sean ahora los conjuntos

- $A_1 = \{x \in U / \quad \text{en} \quad x \quad \text{se elige al menos un grupo de Sétimo} \quad \}$
- $A_2 = \{x \in U / \quad \text{en} \quad x \quad \text{se elige al menos un grupo de Octavo} \quad \}$
- $A_3 = \{x \in U / \quad \text{en} \quad x \quad \text{se elige al menos un grupo de Noveno} \quad \}$

Lo que se pide calcular es entonces:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |U| - \left|\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}\right| = |U| - \left|\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}\right|$$

Ahora,

$$\left|\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}\right| = \left|\overline{A_1}\right| + \left|\overline{A_2}\right| + \left|\overline{A_3}\right| - \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right| - \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_3}\right| - \left|\overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| + \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right|$$

Calculando las cardinalidades involucradas tenemos:

- Se tiene que $\left|\overline{A_1}\right| = C(20,5)$ ya que $\overline{A_1}$ representa al conjunto de todas las maneras de elegir a los grupos donde no haya de sétimo. Con $C(n,k)$ se denota el número de maneras de escoger k elementos de un conjunto de n elementos.
- Así con las demás

$\left|\overline{A_2}\right| = C(25,5) \quad \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right| = C(9,5) \quad \left|\overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = C(16,5)$
$\left|\overline{A_3}\right| = C(27,5) \quad \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_3}\right| = C(11,5) \quad \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = 0$

De tal manera que

$$\begin{aligned}&\left|\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}\right| = \left|\overline{A_1}\right| + \left|\overline{A_2}\right| + \left|\overline{A_3}\right| - \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right| - \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_3}\right| - \left|\overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| + \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right|\\ &= C(20,5) + C(25,5) + C(27,5) - C(9,5) - C(11,5) - C(16,5) + \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right|\\ &= 15504 + 53130 + 80730 - 126 - 462 - 4368 = 144408\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}&|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |U| - \left|\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}\right|\\ &= C(36,5) - 144408 = 376992 - 144408 = 232584\end{aligned}$$

Así que el número de maneras de elegir a los grupos con al menos uno de cada nivel es: 232584.

Los resultados son diferentes. Entonces preguntamos que a qué se debía el error. Ya estaban convencidos de que había un error, ahora la cuestión era encontrarlo.
Se les propuso realizar un caso particular. Se les recordó que dado un caso particular (una manera), debía existir una combinación única de los valores de las etapas mediante las cuales se obtenga dicho caso.

Se les explicó que para formar el caso particular, se utilizaría la notación de secciones utilizada en algunos Colegios de Costa Rica. Así, como hay 16 sétimos, estos se denotan:

$$7^\circ - 1, 7^\circ - 2, \ldots, 7^\circ - 16.$$

Los 11 octavos se denotan:

$$8^\circ - 1, 8^\circ - 2, \ldots, 8^\circ - 11.$$

Y los novemos se etiquetan:

$$9^\circ - 1, 9^\circ - 2, \ldots, 9^\circ - 9.$$

Bajo esta notación, se les dio este caso particular:

$$\{7^\circ - 1, 8^\circ - 1, 9^\circ - 1, 7^\circ - 2, 7^\circ - 3\}$$

Y les preguntamos que si ese caso se podía obtener de manera única mediante una combinación de las etapas.

Resultados

Varios estudiantes hicieron el siguiente análisis:

En la etapa 1, escogeríamos a la $7^\circ - 1$.

En la etapa 2, a la $8^\circ - 1$.

En la etapa 3, a la $9^\circ - 1$.

Y en la última etapa, a la $7^\circ - 2$ y a la $7^\circ - 3$.

Pero con esas mismas etapas, esa posibilidad de escoger a los grupos se puede obtener así:

En la etapa 1, escogeríamos a la $7^\circ - 2$.

En la etapa 2, a la $8^\circ - 1$.

En la etapa 3, a la $9^\circ - 1$.

Y en la última etapa, a la $7^\circ - 1$ y a la $7^\circ - 3$.

Es decir una escogencia particular se obtiene de al menos dos combinaciones de las etapas, cuando cada caso particular debe de obtenerse por única combinación de las etapas.

Un Test aplicado

Tratando de ver si lo anterior había quedado claro, se propuso a los estudiantes el siguiente problema, tomado de Sanabria (2012[5]):

> Suponga que en la Asamblea Legislativa hay 16 diputados del partido X, 26 del partido Y y 11 del partido Z. Se debe formar una comisión de 8 diputados. ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión si se debe elegir al menos un diputado de cada partido?
> Se les pidió que analizaran la siguiente solución:
>
> Etapa 1: Elegir un diputado del partido $X : C(16,1)$
> Etapa 2: Elegir un diputado del partido $Y : C(26,1)$
> Etapa 3: Elegir un diputado del partido $Z : C(11,1)$
> Etapa 4: Elegir el resto: $C(50,5)$
>
> Total $C(16,1)C(26,1)C(11,1)C(50,2)$
>
> Si es correcto, explique por qué, y si no, dé un caso en el que con esas etapas, no se obtenga de manera única.

Cuatro estudiantes respondieron que era incorrecto justificando con un caso particular el cual se obtiene de varias maneras por combinación de las etapas, dos estudiantes respondieron que era incorrecto pero la justificación era incorrecta y tres estudiantes lo dejaron en blanco.

Lo anterior nos muestra que este tipo de problemas son difíciles, y que se debe dedicar más tiempo de enseñanza en ellos. No obstante, los casos expuestos por los estudiantes que respondieron correctamente, nos dejan satisfechos y creemos que esta forma de abordar estos problemas por casos y etapas y la debida interpretación de la regla del producto, contribuirá en un mejor control del proceso de conteo de un determinado problema.

1.6 A modo de Conclusión:

Los problemas de conteo se caracterizan por ser muy difíciles y porque a menudo, queda la sensación de haber hecho un conteo incorrecto. Lo anterior se debe a que, por lo general, la solución que se da es escueta y carece del rigor matemático con que se resuelven problemas de otros dominios de la matemática, por ende, no se tiene el control en cada etapa del proceso de conteo.

Sin embargo, una buena interpretación de la regla del producto y una correcta aplicación, permitirá tener un mejor control sobre el proceso de conteo. A menudo es complicado hacerle ver a un estudiante del error en que incurrió cuando aplicó la regla del producto, pero es de gran utilidad si comprende que dado un caso particular, debe existir una única combinación de los valores de las etapas en la que ese caso se da. Si hay varias formas en que se dé, entonces habrá un conteo incorrecto.

Pese a las aclaraciones, un porcentaje muy pequeño de los estudiantes lograron resolver el problema propuesto, similar al analizado en clases, de manera correcta. Esta experimentación nos indica que hay que trabajar más en tales conceptos, y reafirma que los problemas de conteo, no son sencillos de resolver.

Bibliografía

[1] F. Núñez (2007). Problemas de conteo: ¿Por qué son tan difíciles?. Basado en las ideas de André Antibí. En Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. Memorias IV Congreso Internacional de la Matemática Asistida por Computadora (4to CIEMAC) (Vol. 1, No. 2).

[2] G. Polya (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* (Trad. J. Zagazagoitia). México: Trillas. (Original en inglés, 1965).

[3] R. Roa (2000). Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada. Unpublished Doctoral dissertation. Universidad de Granada.

[4] A. Schoenfeld (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

[5] G. Sanabria (2012). *Comprendiendo las Probabilidades*. Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica

[6] G. Sanabria & F. Núñez (2010). Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. En Facultad de Ciencias Naturales, Universida Estatal a Distancia. Memorias III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED, realizado en el INBio Parque, Heredia, Costa Rica, 3 y 4 de setiembre 2010. InBio Parque, Heredia, Costa Rica.

[7] G. Sanabria & F. Núñez (2011). Introducción a la probabilidad utilizando la simulación en Excel. Memorias del 1er Encuentro Internacional de Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística

(EIEPE), del 12 al 15 de julio de 2011. México: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad.