Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 16, No 1. Setiembre − Febrero 2016. ISSN 1659 -0643

Dualidad y simetría en el aprendizaje matemático. El ejemplo de las cuadráticas

Juan Antonio Pérez
japerez@uaz.edu.mx
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas - México

Recibido: Enero 3, 2015 Aceptado: Mayo 3, 2015

Resumen. En el presente trabajo se propone al pensamiento complejo y el pensamiento crítico como componentes fundamentales del pensamiento matemático contemporáneo, que centra su atención en dos fenómenos paradigmáticos: la simetría y la dualidad. Las ideas expuestas se ilustran por medio de una secuencia didáctica propuesta para la presentación del tema conocido como *las cuadráticas*.

Palabras clave: Pensamiento matemático, pensamiento complejo, pensamiento crítico, simetría, dualidad.

Abstract. In this work we look at complex thinking and critical thinking as fundamental components of the contemporary mathematical thinking, that according to the author, focusses on two paradigmatic phenomena: symmetry and duality. The exposed ideas are illustrated by means of a didactic sequence proposed for the presentation of the topic known as *quadratic equations*.

KeyWords: Mathematical thinking, complex thinking, critical thinking, symmetry, duality.

1.1 Introducción

El trabajo matemático contemporáneo centra sus esfuerzos en el estudio de las estructuras, siendo la de *grupo* la primera que históricamente revolucionó el pensamiento matemático, después de más de dos siglos de la aparición del concepto de *función*. Las categorías universalizan las estructuras y se apropian del escenario de las matemáticas, de su lenguaje y su desarrollo. Una introducción lúdica y elemental a la Teoría de las Categorías puede encontrarse en [10].

La estructura de grupo representa el paradigma matemático de la simetría. Una célebre frase de Brouwer describe con gran tino el hito matemático producidpo por la Teoría de los Grupos, al afirmar que los números miden cantidades, y los grupos miden simetrías. La matemática contemporánea se nutre intensamente de los fenómenos[1] de la simetría y la dualidad.

La dualidad por su parte es mejor expresada en términos de categorías, siendo el análogo matemático del principio dialógico de Morin. Una buena referencia para el tema es el notable libro de Lawvere [10, p. 238], además del clásico texto seminal de MacLane [11, p. 31].

Los objetos de las matemáticas son abstractos, esa es su escencia, y es obedeciendo a ella que deben ser aprendidos y aprehendidos. El ejercicio del quehacer matemático tiene más que ver con la abstracción que con lo abstracto. Es decir, el proceso de abstración, ese mediante el cual se captura lo esencial de un objeto, es lo que define el pensamiento matemático, y no el objeto abstracto en sí.

La imaginación y el rigor son también componentes sin los cuales, cualquier interpretación de lo que la Matemática es se desdibuja. El rigor implica que cada resultado se apoya en uno previo, y la imaginación se ejerce para representar la realidad en signos reconocibles y manejables, además de una herramienta indispensable en la construcción de conjeturas razonables.

Las siguientes cuatro secciones, de la 2 a la 5, contienen la fundamentación teórica que sustenta la propuesta de secuencia didáctica que se presenta en las secciones 6 y 7. Una propuesta semejante a la contenida en este trabajo puede encontrarse en [15]. En ella se ofrece una perspectiva fundamentalmente geométrica del tema que se trata en el presente documento.

1.2 El pensamiento matemático

El pensamiento matemático es tan complicado de definir como la Matemática misma; por ello, es más sencillo y aconsejable intentar una descripción más que una definición. La universalidad de la Matemática se encuentra ya expresada en su origen etimológico: $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$, cuyo significado es "conocimiento". La historia del término muestra, entonces, que trasciende desde siempre lo numérico o cuantitativo. El pensamiento matemático, entonces es una capacidad mucho más profunda que la que significa la habilidad para trabajar con números o polinomios. Es toda una forma de observar a la Naturaleza y abordar su transformación, a partir de reconocer en ellas patrones numéricos, lógicos, geométricos y estructurales. Involucra la propensión a realizar análisis en términos de estas propiedades, que son abstractas en el sentido de que concentran su atención en la intimidad de ellas, haciendo abstracción de otras propiedades de naturaleza más material.

Al igual que cualquier otra capacidad humana, el pensamiento matemático puede desarrollarse a través de entrenamiento. Ciertamente, la naturaleza humana presenta una gran variedad de capacidades naturales, lo que redunda en que el desarrollo del pensamiento matemático puede ser logrado con más

[1]Noúmenos en la termonología de Kant, expresión que se refiere al análogo abstracto de fenómeno, término este último que se reserva para objetos y eventos materiales. Ver, por ejemplo [9, p. 208].

facilidad en algunas personas que en otras. Es un estilo de pensamiento y no necesariamente involucra pensar en objetos y hechos matemáticos. Un cuerpo atlético puede haber sido adquirido a través de las leyes de la herencia genética, sin la necesidad de pisar un gimnasio, pero para la mayoría de las personas, obtenerlo pasa por largas sesiones de entrenamiento, disciplina y constancia. Análogamente, el pensamiento matemático es parte de la carga genética de algunas personas, pero la mayoría habrá de pasar por un entrenamiento sistemático para adquirirlo.

En un artículo sobre los problemas y desafíos en educación matemática, Michèlle Artigue [1, p. 5] hace una aguda observación que llama a los involucrados en la educación matemática a revolucionar los sistemas educativos.

> ... si bien en nuestras sociedades parece ser cada vez más compartida la idea de que es necesaria una cultura matemática y científica sólida para que todos los individuos puedan ejercer sus responsabilidades ciudadanas, esas mismas sociedades se han organizado para funcionar sobre la base de una cultura matemática poco profunda.

La cultura matemática sólida a la que se refiere Artigue, no puede sino involucrar algún nivel de ejercicio del pensamiento matemático, por lo que éste se convierte en una necesidad social, indispensable para que los ciudadanos cumplan con sus roles de forma colectivamente conveniente. Transcendiendo lo numérico, el pensamiento matemático es una eficiente herramienta de toma de decisiones, por lo que se hace indispensable como parte del bagaje cultural del ciudadano medio. El pensamiento matemático es entonces un instrumento de participación social y hasta de acción política, lo que pone de relieve su importancia como objetivo de aprendizaje. En su trabajo sobre el pensamiento matemático, Leone Burton [7] lo describe como un estilo de pensamiento que no necesariamente involucra matemáticas, refiriéndose con ello a operaciones, procesos y dinámicas matemáticamente reconocibles.

La situación ronda las proporciones catastróficas, pues mientras que observamos a una proporción importante de la población más allá de la edad escolar depender de los dispositivos electrónicos para los cálculos más elementales, los gobiernos siguen planteándose el objetivo de la calidad educativa sin mostrar una idea clara de su significado. En el mejor de los casos, la instrucción matemática ordinaria obtiene del estudiante un uso adecuado del dominio semántico propio de las matemáticas, sin plantearse siquiera la incursión en su dominio semiótico[2], con el que el pensamiento matemático es más identificable. La distinción entre ambos dominios es puesta de relieve en el trabajo de Zazkis y Liljedahl [17] sobre el reconocimiento de patrones y su expresión algebraica.

De acuerdo con Kaye Stacey [16], el pensamiento matemático es importante de tres formas: como meta escolar, como una forma de aprender matemáticas y para enseñar matemáticas. Distingue en este trabajo dos procesos en los que el pensamiento matemático se hace manifiesto: de la especialización a la generalización, y de la conjetura al argumento. La abstracción es, sin duda, una componente fundamental de ambos procesos, en los que gravita la necesidad de la demostración, en niveles graduales de sofisticación. Las componentes que Sytacey distingue en el pensamiento matemático son Razonamiento, Modelación y Construcción de conexiones. Como veremos, estas componentes establecen nexos claros e indiscutibles entre el pensamiento matemático, el pensamiento complejo de Morin [12, 13], y el pensamiento crítico de Black [6].

[2]El término *dominio semiótico* fue intorducido por el lingüista Paul Gee en su libro [8] sobre videojuegos y aprendizaje, usamos aquí la expresión *dominio semántico* en completa analogía.

En el ámbito escolar, el pensamiento matemático hace la diferencia. Cuando está presente en los profesores posibilita la incursión de los estudiantes en este estilo de pensar y concebir la realidad, de forma que su ejercicio es indispensable en cualquiera que practique la docencia en matemáticas.

El pensamiento matemático involucra una concepción filosófica a propósito de la Matemática y los objetos con los que en ella se trata. Estoy convencido de que el Intuicionismo Materialista es la herramienta filosófica idónea para plantear la construcción y el cultivo de las habilidades propias del pensamiento matemático. Según esta perspectiva de la Matemática,ésta es una ciencia natural, por lo que la experimentación es una de sus componentes fundamentales. Las particularidades de esta corriente de pensamiento serán publicadas en un trabajo por separado.

Finalmente, dado que la matemática contemporánea concentra su atención en la dualidad y la simetría, el pensamiento matemático usa estas estructuras como instrumentos básicos de operación. El aprendizaje de las matemáticas deberá, en consecuencia, enfatizar la dualidad y las estructuras, dondequiera que éstas sean identificables.

1.3 El pensamiento complejo

El pensamiento complejo es básicamente una corriente filosófica, contraria al reduccionismo clasificatorio, que entiende la realidad como un sistema de conexiones al que Morin [12] llama *complejidad*. Los tres principios básicos del pensamiento complejo son, en un muy apretado resumen, el hologramático, dialógico y de recursividad organizacional.

El *principio hologramático* observa una interacción entre la parte y el todo, las cuales se determinan mutuamente. El *principio dialógico* guarda analogías con la dialéctica de Hegel, pero a diferencia de éste, no considera al progreso como producto de la *unidad y lucha de contrarios*, sino como, en una postura conciliatoria, la *contradicción y complementareidad de los duales*. El *principio de recursividad organizacional* concibe al conocimiento, y por tanto al aprendizaje, como una espiral en la que causas y efectos permutan roles en una espiral progresiva.

Los dos procesos de pensamiento matemático que distingue Stacey son, en realidad, bidireccionales, y vistos así se identifican con claridad como los dos primeros principios básicos del pensamiento complejo, así como el tercero se asocia naturalmente con el ejercicio de ellos, como instrumentos de aprendizaje.

No hay una contextualización única de los fenómenos, los hechos y los objetos, sino que hay una malla de relaciones múltiples, cuya comprensión es la finalidad de la Ciencia: la unificación de las ciencias. Se requieren, según Morin, nuevos conceptos globales y comprehensivos que posibiliten la contextualización y articulación de saberes y que hagan visibles [13] los conjuntos complejos, las interacciones y retroacciones entre las partes y el todo, las entidades multidimensionales, y los problemas paradigmáticos.

Esencialmente, si bien es cierto que la división de las ciencias permiten estudiar eficientemente los fenómenos desde perspectivas particulares, la visión global debe estar presente a fin de producir conocimiento verdadero y verdaderamente útil. Ante una pregunta del estudiante sobre la aplicación o aplicabilidad de lo que se aprende, el profesor comete con frecuencia el error de ilustrar un ejemplo, que sin la adecuada presentación, construye una percepción en el estudiante acorde a la mutilante simplicidad. Es decir, se corre el riesgo de que el estudiante asocie el tema con la aplicación como si esta fuese única, limitando su creatividad y su imaginación. El término complejidad refleja únicamente lo contrario de la simplicidad, planteando que las relaciones no son, ni únicas, ni unívocamente determinadas.

El conocimiento científico es concebido por la simplicidad, como la actividad humana encargada de disipar la aparente complejidad de los fenómenos, a fin de revelar el orden simple al que obedecen. Los modos simplificadores del conocimiento mutilan, más de lo que expresan, aquellas realidades o fenómenos de los que intentan dar cuenta. Para el pensamiento complejo, la esencia de la realidad es la complejidad, y la única manera de comprenderla es iniciar su estudio teniéndola en consideración.

El pensamiento complejo guarda analogías profundas con el pensamiento matemático, de manera que hay disciplinas de esta ciencia, como la Teoría de las Categorías, que encarnan la esencia de la complejidad en matemáticas. Al igual que para la complejidad, para la Teoría de las Categorías, los objetos son secundarios y los morfismos son fundamentales, entendidos como relaciones direccionales entre objetos [14]. El amor es una relación que se compone de, por lo menos, las relaciones direccionales duales: amar y ser amado.

La complejidad tiene su expresión matemática en las categorías, en tanto que en Biología se manifiesta en la Teoría General de Sistemas de Luwdig von Bertalanffy [5]. De acuerdo con esta teoría biológica, un organismo es la suma organizada de las interacciones de todas sus componentes entre sí, y de éstas con el medio. La concepción sistémica ha encontrado referentes importantes en física, ingeniería y educación.

En términos generales, puede decirse que el pensamiento complejo es la componente filosófica del pensamiento matemático.

1.4 El pensamiento crítico

El pensamiento crítico, si bien es cierto que no entraña una corriente filosófica en sí mismo, se acuña en seno de un estilo de hacer filosofía que se ha identificado bajo el nombre de filosofía analítica, uno de cuyos máximos exponentes es Gottlob Frege, pionero en el desarrollo del cálculo de predicados. Se deben a él contribuciones importantes a la filosofía de las matemáticas, al igual que a sus contemporáneos y colegas Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, junto con quienes integrara el célebre Círculo de Viena.

Max Black, filósofo identificado con la corriente analítica, fue uno de los primeros en usar el término "pensamiento crítico", imponiéndolo como título a su texto de lógica [6] publicado en 1946. Autores con la misma orientación usan los sinónimos "arte de razonar", "lógica aplicada" e incluso "lógica práctica", llegando a usar el irreverente término "lógica informal".

El propósito del pensamiento crítico consiste en examinar la estructura del razonamiento sobre asuntos cotidianos, en dos vertientes: analítica y evaluativa. Proporciona herramientas para analizar la realidad y las conexiones entre sus elementos, y evaluar las conclusiones que de este análisis se obtienen, al igual que la información usada en el análisis y las fuentes de las que proceden.

El pensamiento crítico es, entonces, una metodología cognitiva, que parte de la idea de que la inteligencia no es una herramienta suficiente para la comprensión de la Naturaleza, sino que ésta debe ser apoyada en la racionalidad y la objetividad. La teoría acerca del pensamiento crítico trata sobre cómo se debería usar la inteligencia y el conocimiento para alcanzar puntos de vista más cercanos a la comprensión de la realidad. Un buen pensador crítico está mejor equipado para afrontar el reto de la toma de decisiones.

Una sociedad de pensadores críticos es más democrática, blindada en contra de las injusticias sociales, económicas y políticas. Una comunidad desprovista de pensamiento crítico es mucho más vulnerable a las asimetrías y las inequidades. Las nuevas generaciones deben ser educadas para formarse juicios críticos, construir criterios y argumentos propios. Deben ser formadas para ser tolerantes y revolucionarios.

Mientras que el pensamiento complejo es el alimento filosófico del pensamiento matemático, el pensamiento crítico contiene los nutrientes metodológicos que le son necesarios.

1.5 Aprendizaje crítico y complejo

La gran potencialidad del pensamiento matemático descansa en el pensamiento complejo y el pensamiento crítico, en tanto que la posibilidad del desarrollo de él en los estudiantes gravita en características del profesor de matemáticas, íntimamente relacionadas con el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), y el conocimiento del horizonte matemático (HCK)[3], según son descritos en el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza desarollado por Ball [3, 4].

El HCK está contenido en el MKT, es decir, la vinculación del dominio semiótico asociado con el contenido matemático que se aprende, con sus antecedentes y consecuentes, tanto científicos como históricos y lógicos. Esta componente posibilita extender las espectativas matemáticas de los estudiantes, mediante el descubrimiento dirigido de las conexiones entre hecho y objetos matemáticos, así como de éstos con el entorno inmediato.

El MKT involucra un nivel específico de formalidad con el pensamiento matemático, que como se enfatizó previamente, difiere del acto de pensar en matemáticas. Igualmente, el submódulo HCK no se restringe únicamente a los conocimientos necesarios para el aprendizaje ni las expectativas de futuros

[3] Horizon content knowledge.

aprendizajes, sino que conlleva la consideración del paulatino desarrollo del pensamiento matemático que se adquiere en cada etapa del aprendizaje.

En esta perspectiva, las herramientas básicas de la docencia en matemáticas son:

1. Un concepción filosófica a propósito de las matemáticas.
2. Una sólida formación matemática, compatible con las necesidades de sus estudiantes.
3. Conocimiento del medio en el que el aprendizaje se desarrolla.
4. Familiaridad con el pensamiento matemático.
5. Visión panorámica de la disciplina.
6. Ubicación de las matemáticas en el escenario científico.

La sociedad moderna demanda cada vez con mayor exigencia, conocimientos y habilidades matemáticas suficientes para resolver problemas complejos, donde por complejo se entiende como situado en escenarios diversos. En la gran mayoría de los entornos de actividad profesional, distan mucho de pertenecer a una única disciplina científica, por lo que su tratamiento requiere de una visión compleja de la realidad, puesto que ella misma goza de esa complejidad.

Del mismo modo, el tratamiento de los problemas que la realidad plantea, pueden únicamente ser abordados por medio de la disciplina metodológica planteada por el pensamiento crítico. Finalmente, La corriente educativa conocida como *aprendizaje complejo* reivindica, en términos generales, el constructivismo de Vigotski, abordado desde la perspectiva del pensamiento complejo.

La propuesta presente en este trabajo dista mucho de pretender la construcción de una nueva corriente de pensamiento en el estudio de la matemática educativa, y no se identifica tampoco con ninguna de las existentes. Se reconoce que cada una de las corrientes de pensamiento en el terreno de la matemática educativa ha hecho contribuciones importantes en el camino de entender los mecanismos de aprendizaje en matemáticas. La propuesta es que cada una de ellas aborde la problemática desde la perspectiva de la complejidad y la crítica.

La Matemática es una ciencia experimental. El enunciado de un teorema involucra hipótesis que hacen las veces de instrumental, reactivos y condiciones de laboratorio, para el caso de la química. La demostración es la realización del experimento, cuya naturaleza es definitivamente abstracta. La eliminación de las demostraciones en la enseñanza de las matemáticas desvirtúa su naturaleza, es irracional e indeseable.

Las demostraciónes, al igual que otros experimentos, deben planearse con la dificultad acorde con la madurez matemática del estudiante, y programarse con la idea de contribuir a la maduración. En la Física, por ejemplo, los "experimentos pensados" de Einstein son lo más cercano a una demostración matemática, si bien es cierto que los objetos con los que tratan no son del todo abstracto.

1.6 Polinomios, simetría y dualidad

El aprendizaje de las herramientas vinculadas con el cálculo de raíces de polinomios presentan obstáculos epistemológicos particulares y notables. Un conocimiento del horizonte matemático adecuado, apercibe al profesor de que la importancia del estudio de las cuadráticas descansa en dos hechos matemáticos básicos: el campo complejo es una extensión del campo real de grado 2, y es algebraicamente cerrado. En términos más coloquiales y prácticos, todo polinomio con coeficientes reales, en una indeterminada, puede descomponerse como el producto de polinomios de grado a lo sumo 2. Véase por ejemplo el texto clásico de Artin [2].

Como una consecuencia inmediata de los hechos consignados, una vez que se logre factorizar un polinomio dado, la capacidad para resolver ecuaciones cuadráticas será suficiente para conocer sus raíces. En particular, todo polinomio de grado impar tiene por lo menos una raíz real. Las implicaciones de este hecho en términos de simetría son de tomarse en consideración: toda rotación de $\mathbb{R}^3$ tiene un subespacio de puntos fijos, de dimensión por lo menos 1.

Tenemos la certeza de que los polinomios tiene tantas raíces como su grado, contando multiplicidades, gracias al *Teorema Fundamental del Álgebra*. Por ejemplo, el número a es una raíz de multiplicidad k del polinomio $(x-a)^k$. El polinomio $(x-a)^k(x-b)^m$ tiene grado $k+m$, por lo que tiene entonces $k+m$ raíces, k de ellas iguales con a, en tanto que las restantes m son iguales con b.

Teorema 1.1

Todo polinomio con coeficiente complejos tiene tantas raíces como su grado.

No se conoce una demostración algebraica de este hecho, por lo que, hasta donde llega el conocimiento matemático contemporáneo, el teorema fundamental del álgebra, es un hecho de naturaleza topológica. En el mejor de los casos, se recurre a la continuidad de los polinomios para obtener una demostración. Se conocen soluciones por radicales para los polinomios de hasta cuarto grado. Las ecuaciones de Ferrari, que resuelven las cuárticas, se obtienen reduciendo el problema a la solución de una ecuación cúbica. Las ecuaciones de Cardano y Tartaglia, que resuelven las ecuaciones cúbicas en x, se obtienen de la solución de una cuadrática en x^3.

El aprendizaje de las cuadráticas es entonces un punto de inflexión en el aprendizaje de las matemáticas, por tanto que es un instrumento para desarrollos posteriores, y porque ofrece la oportunidad de introducir a los estudiantes a consecuencias no triviales de la simetría y la dualidad.

El célebre *teorema fundamental de la Teoría de Galois*, que entre otras consecuencias tiene la irresolubilidad de la quínitica por radicales, se obtiene gracias al estudio de la simetría del conjunto de las raíces de un polinomio, en comparación con las de los polinomios ciclotómicos. La dualidad completa el esquema, puesto que ofrece la posibilidad de calcular las raíces complejas de las cuadráticas con discriminante negativo.

En el terreno de las categorías, la dualidad involucra una inversión en la dirección de los morfismos. En un grupo, por ejemplo, el inverso de cada elemento es único, de manera que, cada elemento es el inverso de su inverso. El racional 2 es el recíproco de $\frac{1}{2}$ y también se tiene que $\frac{1}{2}$ es el recíproco de 2. Sin embargo, la derivación y el cálculo de primitivas son operaciones duales que no son inversas: la derivada de x^2 es $2x$, pero x^2 es apenas una de las primitivas de $2x$.

La conjugación compleja es otra forma de dualidad, cuyos nexos con el cálculo de raíces de polinomios es particularmente relevante. Las raíces complejas se dan por pares de conjugados[4].

Teorema 1.2

Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y $p(z) = 0$, donde $z = a + ib$, entonces también $p(\overline{z}) = 0$, donde $\overline{z} = a - ib$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es común que se enfatice la memorización de la ecuación anterior, que proporciona la solución general de las ecuaciones de segundo grado, cuya forma general es la siguiente.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La demostración de hecho, que es rutinario presentar en un curso típico, se mantiene en el terreno del dominio semántico de las matemáticas. Resolver la ecuación cuadrática anterior significa encontrar los ceros del polinomio

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

que es una forma distinta de encarar el problema, incursionando en el terreno del dominio semiótico. El polinomio cuadrático más sencillo posible tiene la forma $p(x) = ax^2$ para $a \neq 0$. Sus ceros son reales, iguales y ambos cero. La gráfica cartesiana de de este polinomio es una parábola con eje de simetría en el eje de las abcisas, y con vértice en $(0,0)$. La *parábola dual* de $p(x) = ax^2$ es la parábola $\widehat{p}(x) = -ax^2$, en donde notamos que $\widehat{p}(x) = p(ix) = p(-ix)$.

En la siguiente ilustración presentamos la gráfica de varias parábolas con distintos valores positivos de a con trazo continuo, y las parábolas duales en trazo punteado.

[4]Este fenómeno de dualidad se observa también en todas las otras álgebras normadas sobre $\mathbb{R}$: los cuaternios de Hamilton y los octonios de Cayley.

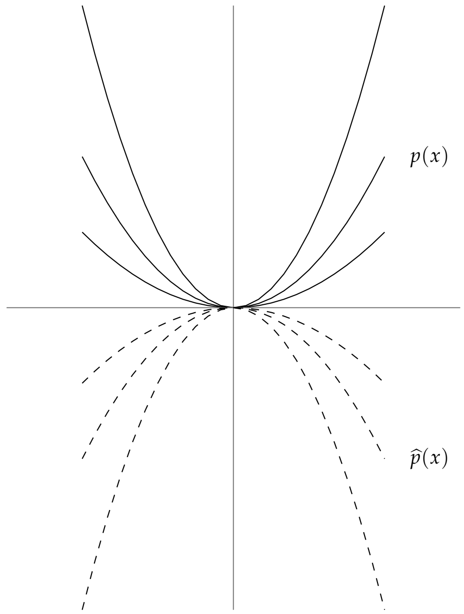

Figura 1.1

Teorema 1.3

Una parábola tiene un cero doble igual a cero si y sólo si tiene la forma $p(x) = ax^2$ para $a \neq 0$.

El resultado anterior nos permite concentrar nuestros esfuerzos en las parábolas de la forma $p(x) = \pm x^2$, si de encontrar sus ceros se trata.
Encontrar los ceros de una parábola de la forma $p(x) = x^2 + bx$ no involucra en realidad la solución de una ecuación cuadrática, dado que se factoriza como producto de polinomios lineales, puesto que $p(x) = x(x + b)$. Entonces, la siguiente parábola en complejidad que vale la pena considerar es la de la forma $\widehat{p}(x) = x^2 + K$, cuya parábola dual es $p(x) = -x^2 + K$. Notemos que $\widehat{p}(x) = x^2 + K$ no tiene raíces reales para valores positivos de K, y que sus raíces complejas son $\pm i\sqrt{K}$, en tanto que para valores negativos de K, ambas raíces son reales y sus valores son $\pm\sqrt{K}$.

Teorema 1.4

Una parábola de la forma $p(x) = x^2 + K$, para $K \neq 0$ tiene ceros para $x = \pm\sqrt{K}$.

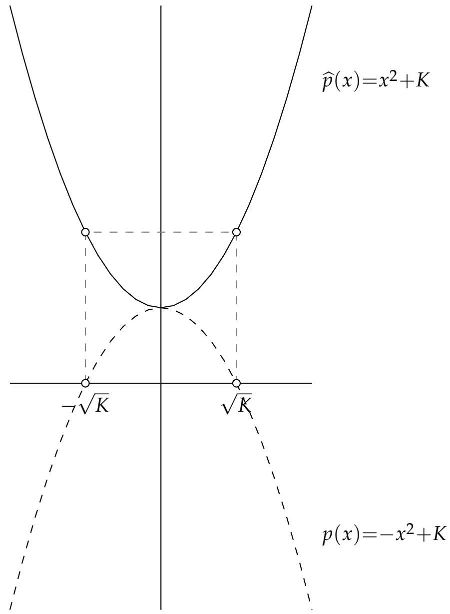

Figura 1.2

Teorema 1.5

El número $\sqrt{K}$ es un cero de $\widehat{p}(x) = x^2 + K$ si y sólo si $-i\sqrt{K}$ es una raíz de su parábola dual $p(x) = -x^2 + K$.

Las raíces de un polinomio cuadrático son simétricas respecto del eje de simetría de la parábola que lo representa, con independencia de su ubicación en el plano cartesiano, si el eje de simetría es vertical. La simetría bilateral es entonces un invariante de las raíces de los polinomios cuadráticos. Notemos ahora que una traslación del eje de simetría se opera por un cambio de coordenadas en el eje de las abcisas.

1.7 La cuadrática general

Una parábola de la forma $p(x) = x^2 + Mx + N$, puede transformarse, mediante trasladación de coordenadas conveniente, de manera que luego del cambio la parábola adquiere la forma $p(x) = x^2 + K$. Para ello es suficiente trasladar el eje de simetría de la parábola, lo que se logra conociendo su ubicación. Hacerlo explota nuevamente la simetría bilateral de la parábola y nos coloca en un escenario dominado y conocido

.

Si $p(x) = x^2 + Mx + N$, entonces $p(0) = N$ y $p(x_0) = N$ si $x_0^2 + Mx_0 = x_0(x_0 + M) = 0$, lo que ocurre si $x_0 = 0$ o si $x = -M$. Por simetría, el eje de simetría es la recta cuya abscisa constante es la media aritmética de estos dos valores. En otras palabras, el eje de simetría es la mediatriz de segmento que une los puntos $(0, N)$ y $(-M, N)$.

Teorema 1.6

El eje de simetría de la parábola $p(x) = x^2 + Mx + N$ es la recta $x = -\frac{M}{2}$.

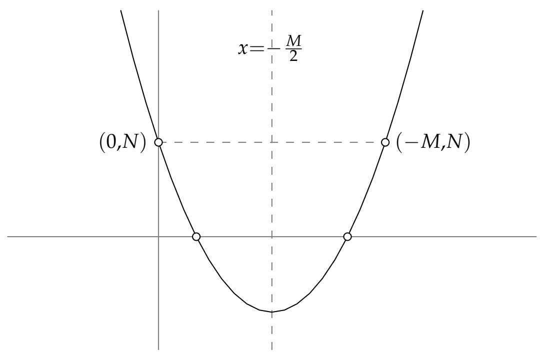

Figura 1.3

En virtud del resultado anterior, haciendo $z = x + \frac{M}{2}$ se transforma el polinomio $p(x) = x^2 + Mx + N$ en $q(z) = z^2 + \frac{4N-M^2}{4} = z^2 + K$, que tiene la forma ya estudiada.

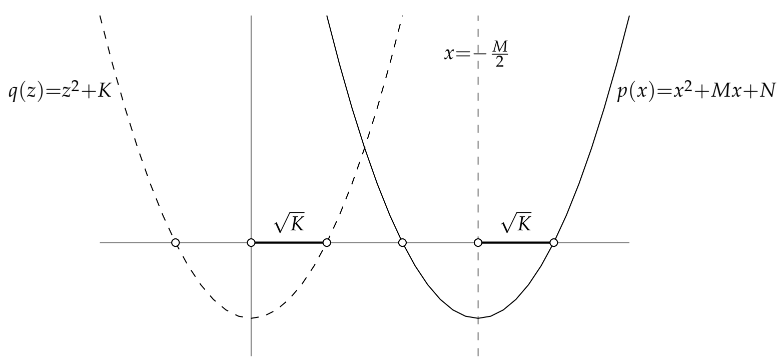

Figura 1.4

La dualidad de parábolas y ceros se pone de manifiesto si escribimos

$$x^2 + Mx + N = \left(x + \frac{M}{2}\right)^2 + N - \frac{M^2}{4},$$

en donde se hace evidente la relación entre los ceros de una parábola y su eje de simetría. Entonces

$$x^2 + Mx + N = z^2 + K,$$

para $z = x + \frac{M}{2}$ y $K = N - \frac{M^2}{4}$.

Teorema 1.7

Las raíces del polinomio $p(x) = x^2 + Mx + N$ están dadas por

$$x_0 = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4N}}{2}.$$

Basta observar finalmente que las raíces de $P(x) = ax^2 + bx + c$ coinciden con las raíces de $p(x) = x^2 + Mx + N$, donde $M = \frac{b}{2}$ y $N = \frac{c}{2}$.

Corolario 1.1

Las raíces la del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ están dadas por

$$x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para $a \neq 0$.

Las raíces complejas de un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ con *discriminante* negativo

$$D = b^2 - 4ac$$

son los números complejos conjugados

$$\frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i\sqrt{K},$$

lo que muestra que son simétricos respecto de la recta con parte real constante $-\frac{b}{2a}$ en el plano complejo.

1.8 Conclusión

Una parábola en el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tiene su dual en el plano $i\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y viceversa, como se pone de manifiesto con la ecuación

$$\widehat{p}(x) = -x^2 + K = p(ix)$$

para $p(x) = x^2 + K$. Y como hemos visto, la consideración de las parábolas de esta forma es suficiente para estudiar las soluciones de las ecuaciones cuadráticas. La memorización de la ecuación que resuelve las cuadráticas mediante radicales es un objetivo alcanzable, pero no indispensable. Por otra parte, la presentación de las soluciones de las cuadráticas mediante la explotación de la simetría y la dualidad pone de manifiesto fenómenos paradigmáticos del pensamiento matemático contemporáneo, lo que le confiere un alto valor científico y cultural.

En [15] se presenta una propuesta de presentación del tema de la solución de las llamadas ecuaciones cuadráticas a nivel medio, explotando la simetría. En el presente trabajo enriquecemos la propuesta

mediante la explotación de la dualidad. Esta propuesta ofrece la posibilidad de contribuir a la construcción del pensamiento matemático en el estudiante, abriendo perspectivas que le permitan abordar los complejos problemas que la vida, las matemáticas y la ciencia presentan.
Otros ejemplos de dualidad y simetría, con propuesta de presentación en el ámbito escolar serán publicadas en documentos por separado.

Agradecimientos. El autor desea agradecer el notable trabajo de los árbitros, sin el cual muchos errores podrían no haber desaparecido. Los yerros que el trabajo conserva son, exclusivamente, responsabilidadde su redactor original.

Bibliografía

[1] Artigue, M. “Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece la didáctica de la matemática para afrontarlos?”. *Educación Matemática* Vol. 16, No. 3 (2004) 5-28.

[2] Artin, E. *Galois Theory*. Dover Publications, New York 1998.

[3] Ball, D.L.; Hill, H.C.; Rowan, B. “Effects of teachers? mathematical knowledge for teaching on student achievement”. *American Educational Research Journal*, Vol 2. No. 42 (2005) 371-406.

[4] Ball, D.L; Thames, M.H.; Phelps, G. “Content knowledge for teaching: What makes it special?”. *Journal of Teacher Education*, vol 5, No. 59 (2008) 389-407.

[5] Bertalanffy, L. von. “An outline of General System Theory”. *British Journal of Philosophy of Science*, vol. 1 (1950) 139-164.

[6] Black, M.; Murphy, A. *Critical thinking: an introduction to logic and scientific method* Prentice Hall, New York 1946.

[7] Burton, L. “Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning”. *Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 15, No. 1 (Jan., 1984) 35-49.

[8] Gee, J. P. *What video games have to teach us about learning and literacy*. Palgrave Macmillan, Basingstoke 2008.

[9] Kant, I. *Crítica de la razón pura*. Traducción de Pedro Ribas, Editorial Taurus, Madrid 2005.

[10] Lawvere, F. W,; Schannuel, S. H. *Matemáticas conceptuales. Una primera introducción a categorías*. Siglo XXI Editores, México 2002.

[11] MacLane, S. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, New York 1971.

[12] Morin, E. *Introducción al Pensamiento Complejo* Gedisa, Barcelona 1994.

[13] Morin, E. *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro* UNESCO, París 1999.

[14] Oziewicz, Z.; Pérez, J. A. “Pensamiento complejo y Pensamiento categótico”. *Memorias del Primer Congreso Latinoamericano de Ciencias Sociales*, (2012) versión digital.

[15] Pérez, J. A. “Las cuadráticas. Una aproximación constructivista”. *Educación Matemática*, vol. 16, no. 3 (2004) 127-134.

[16] Stacey, K. “What is mathematical thinking and why is it important?”. *University of Melbourne* (2009) 39-48.

[17] Zazkis, R.; Liljedahl, P. “Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation”. *Educatioinal Studies in Mathematics*, vol 49 (2002) 379-402.