

Los comienzos de la geometría primitiva Una reflexión

Javier González Mendieta
jg_mendieta@hotmail.com
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
México

Isaí Cantor Jiménez
isaith_c@hotmail.com
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
México

Recibido: Enero 23, 2015 Aceptado: Junio 23, 2015

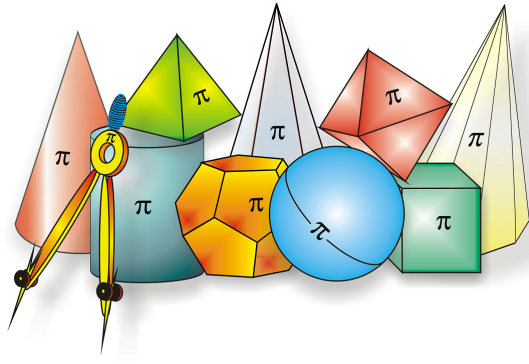
Resumen. En este artículo se analiza el origen de los conceptos de la geometría y el cómo y el porqué de su sistematización. Una primera aproximación al análisis de los procesos involucrados en el desarrollo de la geometría determina su objetivo y nos conduce al esclarecimiento de lo que se entiende por objeto matemático y, más aún, a lo que se entiende por objeto geométrico, para desembocar en la estructura esencial de la geometría.

Palabras clave: Evolución geométrica, geometría primitiva, geometría psicológica, Paleogeometría, objeto matemático, objeto geométrico, objetivo de la geometría.

Abstract. The origin of geometric concepts, the how, and the why, of their systematization, are analyzed in this article. The analysis of the processes involved in the development of geometry initially, establishes its objective and leads us to clarify what is a mathematical object and, furthermore, what we understand as geometric object, to finally lead to the essential structure of geometry.

KeyWords: Evolution of Geometry, Primitive Geometry, Psychological Geometry, Paleogeometry, Mathematical Object, Geometric Object, Objective of Geometry.

1.1 Introducción



El Origen de la Geometría está inmerso en las culturas y sociedades primitivas, es ahí donde se ha forjado, a través de innumerables generaciones el desarrollo de las ideas que dieron origen a los conceptos u objetos de esta disciplina. Así mismo, las primeras sociedades humanas forjaron el desarrollo intelectual del individuo que, poco a poco, establecieron las bases para la sistematización de la Geometría como una ciencia en pleno desarrollo. También debe considerarse, entre muchas otras cosas en el origen y desarrollo de la Geometría,

la evolución psicológica del individuo, es decir, el desarrollo que el cerebro de los humanos ha tenido, quizá en los últimos 10,000 años; sólo así podremos determinar cuáles han sido los elementos esenciales involucrados en el origen y desarrollo de la Geometría.

1.2 Los comienzos, la Geometría Primitiva

Cada generación agrega conocimiento geométrico al ya acumulado, si no fuese así siempre tendríamos que comenzar; esto da oportunidad de realizar estudios que de otro modo serían muy largos para un ser humano, por lo que el trabajo es retomado, una y otra vez, por nuevas generaciones, quienes están en mejores condiciones culturales y tecnológicas de hacerlo. De ahí que, el conocimiento geométrico es el resultado del trabajo de muchas generaciones que, conscientes o no, con el uso de la escritura y sin ella, acumularon una enorme cantidad de información relacionada con las formas y las relaciones espaciales de los objetos y que, más o menos, hoy llamamos geometría.

Bajo la perspectiva de Vigotsky es claro que por mucho esfuerzo que el sujeto determine, mediante sus acciones, no es suficiente para construir todos los conceptos; los conceptos surgen mediante un análisis exhaustivo que el sujeto determina sobre los objetos y no sólo de la repetición cotidiana de las situaciones del mundo objetivo; además, la relación social del sujeto es fundamental, le indica el nivel de conocimientos y la tecnología existente en su sociedad.

Este **proceso de formación de conceptos** depende directamente de las *acciones* del sujeto, de su actividad, ya sea física o intelectual, y transita por una serie de formas que determinan su generalización y abstracción, transformándose de una *forma externa* en una *forma interna* en el sujeto, es decir, de una *forma material* a una *psicológica* o *interiorizada*. A este proceso se le conoce como *Teoría de la formación por etapas de las acciones mentales* de P. Ya Galperin, quien a su vez se fundamentó en la filosofía materialista de Vigotsky, (Tallizina, 2000, pág. 113). Esto muestra la importancia que determina la relación social sobre un individuo, creándose así una *función generacional*. De ahí que, cuando una generación determina

en la que sigue, mediante su enseñanza, conocimiento y tecnología, su cultura está, al mismo tiempo, desarrollando sobre el individuo su personalidad y conducta social.

Pero si las viejas generaciones comunican sus conocimientos geométricos a las nuevas mediante una *función generacional*, entiéndase aquí como proceso de construcción social del conocimiento, entonces el proceso de enseñanza-aprendizaje en sí adquiere un carácter social. Si no fuese así caeríamos, otra vez, en la cuenta de que cada hombre que necesitara el conocimiento geométrico estaría obligado a descubrir y construir todos los conocimientos geométricos por sí solo.

El largo período de tiempo, de más de millón y medio de años, que hoy denominamos prehistoria y que comprende desde la aparición del hombre hasta la invención de la escritura, fue el escenario y la fragua de innumerables ideas intuitivas de la geometría, punto, línea y esfera, entre muchas otras; es decir, de la *Paleogeometría*. Un período de tiempo aún más largo incluye a la Prehistoria e Historia, que son dos términos relativos en el tiempo, que no puede definirse el uno sin el otro, y que están bajo la frontera nebulosa de la invención y uso de la escritura, período límite que caracteriza el ascenso a la cultura de cualquier agrupación humana.

Bien definida la escritura determinó un nivel totalmente intelectual. Se comenzó, como especie, por darle sentido puramente ideográfico a los dibujos para que se convirtieran en un sistema primitivo de escritura, pero los dibujos pasaron a representar ideas, que ya no fueron esencialmente los del dibujo que los caracterizó; con ello se alcanzó entonces un nivel intelectual en la cultura; siempre que un grupo de seres humanos acepte que un mismo dibujo representa un determinado objeto o idea se estará en condiciones de aceptar, no sólo uno, sino un conjunto de imágenes que se ordenaran, constituyendo entonces una *Escritura Pictográfica* y de ahí, inequívocamente, a las leyes del lenguaje escrito.

La búsqueda de los orígenes de la Geometría es incierta, está inmersa en el origen mismo de la humanidad, sólo queda el análisis de la prehistoria y la comparación de los conocimientos primitivos o nociones de la geometría de las agrupaciones atrasadas culturalmente que hoy existen. En todo caso, estudiar el origen de la Geometría equivale a estudiar el origen de la cultura y de la civilización, estudiar la historia de la Geometría equivale a estudiar la historia del desarrollo tecnológico humano; pero estudiar la historia de la Geometría no es lo mismo que estudiar las causas que le dieron origen; estos son dos problemas bien delimitados que requieren un análisis un tanto distinto. El origen de la Geometría conlleva hacia una visión epistemológica que va de la mano con el análisis histórico de los conceptos de la Geometría y que, sin embargo, es distinto al análisis histórico. Ese tipo de ideas se encuentran en el origen de los Sistemas Axiomáticos en la Grecia antigua. Pudiera pensarse que toda civilización que desarrolle el conocimiento geométrico extensamente tarde o temprano llegará al desarrollo de las demostraciones geométricas y, con ello, a la Geometría Axiomática, no obstante, ¿Puede afirmarse eso si sólo tenemos un ejemplo, el de la Geometría Griega? Eso muestra que el Análisis Histórico no es lo mismo que el Epistemológico.

Al menos en sus inicios la intención original de la Geometría era estudiar las formas, las configuraciones espaciales y las relaciones existentes entre los cuerpos naturales; se comenzó por determinar las relaciones existentes de las distintas partes de un objeto del mundo natural, quizá las más obvias, tales como volumen, superficie, número de caras y características físicas, como peso y dureza, entre otras, ya que no se distinguía entre propiedades físicas y geométricas. No se comenzó por estudiar las características de los cuerpos como propiedades aisladas, más bien, los problemas cotidianos conllevan al estudio de estas propiedades. Así es como la Geometría surgió de la observación del mundo natural,

de la interacción que los humanos siempre han tenido con él y, debido a esto, la Geometría se ha hecho más extensa y práctica. ¿De dónde más, sino es de la observación del mundo natural que nos llegaron nuestras primeras ideas? ¿De dónde más, si el mundo hiere nuestros sentidos aquí y ahora? y, gracias a ello, podemos abstraer, particularizar, generalizar, invertir, comparar, hacer metáforas y experimentos mentales que nos llevan, en una palabra, a reflexionar, llegando así a conceptos aparentemente inimaginables que no podemos reconocer fácilmente en el mundo natural, abstracciones que no parecen tener conexión con el mundo objetivo y que, sin embargo, son lógicas; luego, y a partir de esas primeras observaciones, surgieron las primeras aplicaciones de la Geometría, la medición de terrenos, la construcción de templos, tumbas y pirámides, de caminos e instrumentos que simplificaban la existencia, de herramientas que hacían más fácil el trabajo y que aumentaban las provisiones y la riqueza.

La Geometría ha estado presente en todo el desarrollo de la civilización humana, no es el resultado de un individuo, sino de una conciencia colectiva que debió formarse durante mucho tiempo, tal vez en los últimos 300,000 años o más, que resulta ser un periodo de tiempo relativamente moderno del Paleolítico, que significa etimológicamente *Piedra antigua*, término que inventó el arqueólogo inglés John Lubbock en 1865 y que contrasta con el periodo Neolítico (*Edad moderna de la piedra*) que determina un período más extenso de tiempo de la presencia humana, que va desde hace unos 2.85 millones de años hasta hace unos 12 000 años. Constituye, junto con el Mesolítico-Epipaleolítico (fases de transición) y el Neolítico, la llamada Edad de Piedra, denominada así porque la elaboración de utensilios líticos. (Lubbock, 1913).

No se tienen pruebas claras de cuándo fue que los cavernícolas aprendieron a contar o a calcular, lo mismo se considera al tratar de establecer en que época particular se sitúa el descubrimiento del uso del fuego y de la rueda. Fueron descubrimientos que hicieron muchos grupos prehistóricos y que debieron de utilizar cuando sus necesidades crecieron; así, quizá, tenemos una pista, la necesidad crea la posibilidad de la invención. Podemos imaginar a un "cavernícola genio", quien se dio cuenta, por primera vez, que mojando los leños con brea natural o resina de pino el fuego dura mucho tiempo y que no se apaga fácilmente bajo la lluvia, podemos imaginarlo tratando de llevar un tronco a su cueva y descubriendo que haciéndolo rodar es más fácil; pero al imaginarlo no debemos olvidar que su invención se debió a una necesidad, no fue aislada sino colectiva, probablemente fueron muchos quienes se empeñaban en llevar troncos a su cueva o quienes necesitaban que el fuego durase más tiempo, al final sus mentes evolucionaron, entendiendo intuitivamente la geometría del problema, en una palabra mejoró su razonamiento y entendieron mejor el mundo y su geometría. ¿Porqué podemos analizar en forma geométrica el mundo que nos rodea?... Nuestra mente ha evolucionado de acuerdo a la geometría del mundo natural, hay una interacción entre el cerebro de los seres vivos que modifica y es modificada por el objeto en cuestión. Si nuestro mundo cotidiano tuviera una geometría hiperbólica o las leyes de la física natural inmediata fueran cuánticas quizá entonces nuestros cerebros se hubieran acostumbrado a estas leyes, hubiésemos evolucionado de acuerdo a ellas, no le parecerían extraños a nadie y nuestra geometría clásica sería la no euclidiana. Construimos nuestra geometría de acuerdo al mundo natural y no el mundo natural a nuestra geometría, nuestra "*Realidad Inmediata*" es la de la "*Física Clásica*", por eso evolucionamos en esa forma, nuestro cerebro se ha adaptado a la naturaleza y no ella a nosotros.

Es más, no tenemos porque pensar que el mundo natural es uno y nosotros somos independiente de él, somos parte de él y con él evolucionamos a la par; por eso nuestra mente geométrica evolucionó conjuntamente con la geometría de la naturaleza; no adaptamos la geometría del mundo natural o la modificamos, no modificó la naturaleza nuestra mente, somos un todo, un único mundo multivariado y todo interactuando en todo. ¡Claro está! Quizá se pueda pensar: Pero la geometría de la naturaleza

nunca cambia, ¿Cómo es que puede evolucionar?... Por el momento sólo diremos: ¿Cómo sabemos que π no ha evolucionado? ¿Cómo sabemos que ha tenido el mismo valor en los últimos 60 millones de años?... No obstante, los físicos José I. Latorre, Pedro Pascual y Rolf Tarrach del Departamento de Estructura y Constituyentes de la Materia de la Facultad de Física de la Universidad de Barcelona han puesto en duda la constancia de la velocidad de la luz en su artículo *Speed of Light in Non Trivial Vacua*, (Latorre, Pascual, Tarrach, 1994) y expresaron que la constante C , de la velocidad de la luz, que se creía una constante absoluta y Universal, no ha resultado todo lo constante que uno pudiese esperar, ha disminuido en el transcurso de los últimos 2,000 millones de años, debido a la concentración energética del vacío. Es debido a ello, y a la constante del *Tiempo de Planck*, que se pone en duda la constancia de las constantes físicas y matemáticas, como π y e .

Un estudio del inicio de la cultura conlleva a la posibilidad de encontrar los orígenes de la Geometría, es bajo estos aspectos que se debe delimitar el desarrollo de la geometría primitiva, denominada *Paleogeometría*. Bajo esta perspectiva, consideremos a los hombres de Neandertal que eran nómadas, no dejaron muchos rastros en el aspecto geométrico, por lo que tenemos que conjeturar sobre las nociones que tenían de la Geometría, como lo muestran sus dibujos y construcciones primerizas, y en un mundo salvaje en donde es necesario reconocer ciertas formas, como la de las puntas que lastiman o la del león diente de sable, la del mamut y otras bestias prehistóricas, es esencial, de esto dependía su propia existencia.

Lo mismo sucedió con la aritmética, su aparición comenzó por ser meramente repetitiva y sumamente sencilla, pero luego, y poco a poco, se desarrolló. ¿Cómo es que los hombres prehistóricos aprendieron a contar? ¿Cómo surgió la idea de número? ¿Cómo se desarrollaron los procesos básicos de la aritmética?... Los hombres prehistóricos fabricaban lanzas, pero también fabricaban las puntas de piedra de esas lanzas, ¿Harían siempre el mismo número de lanzas que de puntas? ¿Contaban cada conjunto por separado? En todo caso, debieron comparar conjuntos y esto enfatiza el proceso, "*Comparar Conjuntos*" contar sus elementos. Contar no es más que comparar conjuntos, la comparación siempre se hace en relación a un conjunto que previamente se ha designado como estándar, el más común, para nosotros, es el conjunto de los números naturales. Así que, lo que tienen en común los conjuntos de un elemento, lo que tienen en común los conjuntos con un par de elementos, lo que tienen en común los conjuntos con ternas de elementos y, en general, lo que tienen en común los conjuntos, cuyos elementos se pueden poner en correspondencia uno a uno, es su número. De esta forma tenemos que: *Un número es lo que caracteriza al conjunto de todos los conjuntos equivalentes a un conjunto determinado.* (Russel 1977-pág. 147).

Aprender a contar, para los hombres prehistóricos, no debió de ser fácil, mucho menos tuvieron conciencia de ello, las ideas primerizas de número sólo fueron empíricas; de hecho, los primeros intentos verdaderamente serios de responder a las preguntas sobre el concepto de número, suma y producto de números se hicieron muchísimo tiempo después y la definición formal de número entero, de suma de números enteros y otras, aparentemente elementales, fueron dadas hasta el siglo XIX (1889) por Giuseppe Peano (1858-1932) y F. L. Gottlob Frege (1848-1925) y luego retomadas por Bertrand Russell (1872-1970) entre otros, quienes sistematizaron éste aspecto de la matemática. Esta particular circunstancia matemática, la del uso de los números naturales por los cavernícolas, nos conduce a reflexionar sobre la diferencia entre su descubrimiento y su desarrollo como sistema numérico.

Ahora bien, no es difícil imaginar que los hombres primitivos tardaron mucho en aprender lo esencial de los números y las técnicas básicas de conteo, fue un proceso largo y difícil de situar en la prehis-

toria, es lo mismo que preguntarse cuando se implementó el uso del fuego y cómo fue el desarrollo tecnológico para utilizarlo eficazmente en la cocción de los alimentos, nadie sabe esas cosas, sólo podemos especular desde nuestra perspectiva científica. Entonces, y haciendo una analogía con el origen de la Geometría, tenemos que, las ideas primerizas e intuitivas en la Geometría surgieron, luego, sin duda alguna, se sistematizaron muchos de sus aspectos y, finalmente, los conceptos geométricos, relaciones y métodos fueron formalizados, como en la obra de Euclides. Esto nos lleva a reflexionar sobre los *Niveles de Conceptualización de la Matemática*, y en particular de la Geometría. Primero: debemos considerar el surgimiento u origen de los conceptos de la Geometría; segundo, su desarrollo, es decir, el desarrollo o evolución de las ideas involucradas y, tercero, su formalización; tres aspectos de importancia que esclarecen el estudio de los conceptos de la Geometría, su *Origen, Desarrollo y Formalización*, y que determinan saltos conceptuales en la Geometría.

Simultáneamente al proceso de contar, el de medición se desarrolló; probablemente los hombres prehistóricos efectuaron sus primeras mediciones en forma improvisada, comparaban ciertas partes ya conocidas por ellos, al principio fueron partes de sus propios cuerpos, el pie, el largo del brazo y quizá lo extenso de los pasos, sin embargo, esta medida se hacía convencional y preferencial, por ejemplo, si el brazo era el del líder de la tribu. Al medir distancias siempre comparamos dos longitudes, una de las cuales se designa como *Unidad de Medida*; así mismo, al medir velocidades se compara la velocidad de los corredores, el más rápido puede servir de unidad de medida y, también se compara el tamaño de los animales con relación a uno de ellos o con relación a nuestra estatura, puede ser ésta la unidad de medida. También podemos medir otras cosas, la inteligencia, la agudeza visual, la destreza y cosas aún más complejas, pero la unidad de medida siempre es arbitraria y con el tiempo se hace convencional.

Cuando medimos una distancia d , entre dos objetos, lo que hacemos es comparar cuantas veces cabe la *Unidad de Medida* u en la longitud d , entendiendo por distancia el grado de acercamiento entre dos objetos; es decir, qué tan cerca está uno del otro. En definitiva, medir es comparar; si d representa una longitud y u la Unidad de medida entonces decimos que u mide a d si existe un entero n tal que: $d = nu$, con $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup 0$, si el número n no existe entonces podemos hacer subdivisiones de u ; es decir u/m , $m = 2, 3, 4, \dots$ y encontrar nuevamente a n , y, con ello, d puede representarse en la forma $d = n \left(\frac{u}{m} \right)$; si podemos hacer esto decimos nuevamente que u mide a d , en caso contrario podemos repetir el proceso nuevamente, es decir, dividiendo una de las m partes de u en subpartes, regularmente espaciadas y, mediante ello, aproximar la medición tanto como se quiera, escribiendo nuevamente a d en la forma $d = n \left(\frac{u}{m} \right)$ sin embargo, eventualmente puede suceder que no exista una subdivisión de u que determine a d , en cuyo caso podemos considerar que existe un resto c , deficiencia o exceso, por determinar, lo que nos lleva a representar a d en la forma $d = n \left(\frac{u}{m} \right) + c$, $n, m \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}$; eso, a su vez, nos conduce a la necesidad de esclarecer la naturaleza de c , y la del conjunto de números \mathbb{R} . (Kudriavtsev, 1983, pág. 82 y 83).

Las grandes civilizaciones antiguas sólo consideraron las mediciones bajo el aspecto de los números enteros positivos y de su razón; bajo esa perspectiva, si x y y son dos longitudes y u las mide entonces existen números enteros n_1 y n_2 , en \mathbb{N} , tales que $x = n_1u$ y $y = n_2u$ lo que equivale a decir que su cociente es una razón de números enteros, es decir: $\frac{x}{y} = \frac{n_1}{n_2}$ si eso sucede se dice que x y y son *Longitudes Comparables* o *Commensurables*; si sucede que x y y no tienen unidad de medida en común las llamamos *Longitudes incomparables* o *Incommensurables*. (Efimov, 1984 pág. 135; Kudriavtsev, 1983, pág. 82).

Hace más de 40,000 años los hombres prehistóricos, a través de la práctica, no sólo mejoraron las cuestiones aritméticas, también mejoraron las cuestiones empíricas de la Geometría, lo que conllevó a su sistematización. Midiendo aquí y contando allá pronto las técnicas de la Geometría se desarrollaron cada vez más, debido, en gran medida, a la gran curiosidad intrínseca que los hombres prehistóricos mostraron ante el mundo natural. Esto, aunado a la acumulación de conocimientos, les hizo avanzar y desarrollar, poco a poco, técnicas geométricas más sofisticadas que, intuitivamente, pudieron aplicar a una gran variedad de problemas de su vida cotidiana, así lo muestra su Arte, Arquitectura, Astrología, Alfarería y fabricación de sus ropas primitivas.

Y bajo los aspectos del arte de los hombres primitivos sobresalen las pinturas en las cavernas en las que vivieron. Ahí se encuentran, en las paredes y rocas, figuras estilizadas, lo que muestra la capacidad e imaginación para representar las formas geométricas del mundo en que vivían; dibujaron animales, la Luna, el Sol, las estrellas y eventos extraordinarios, lo que nos dice el interés que debieron haber manifestado por los trazos, ¡*Una geometría inconsciente!* quizá origen del ascenso a la cultura del hombre. También representaron su vida cotidiana, los rebaños de animales, los incendios forestales, los bosques y mucho más. Estas experiencias debieron parecerles mágicas y místicas, les llevó a reconocer configuraciones geométricas, formas que se repiten continuamente en la naturaleza, tales como círculos, rectas, planos y esferas; formas geométricas que podemos encontrar en la anatomía de los animales, las fases de la Luna, el Sol, en las ondas del agua, en los rayos de luz filtrándose a través de los árboles, en el arcoíris y hasta en los ojos de los humanos.

Las pinturas rupestres más antiguas son del período Paleolítico, 35,000 a 30,000 años a. de C. halladas en *Aurignac*, Francia. No menos de 2,000 pinturas se han estudiado en España, Francia y en general en Europa, confirmando la variedad de las figuras, materiales utilizados y estilos en las pinturas; entre las más sofisticadas se encuentran: *Teyat*, *Lascaux*, de entre 15,000 y 16,000 años de antigüedad. *Les Tríos Frères*, *Les Convaresses* en Francia y *El Castillo* y *Altamira* en España. También las encontramos en América; en la península de Baja California, México, se han encontrado no menos de 200 sitios con pinturas rupestres que datan de entre 8,000 a 12,000 años de antigüedad. Resultan interesantes y representativas *La cueva del Ratón*, *La Cueva Pintada* y *La Cueva de las Flechas* en la Sierra de San Francisco. También existen pinturas rupestres en *Trafal*, en Argentina, con pinturas significativas pues ahí se muestran gran número de figuras geométricas, espirales, círculos y animales estilizados, seguramente muy difícil de cazar, que tienen dibujadas líneas sobre sus cabezas, mágicos tal vez, pero indiscutiblemente reconocidos como rayos solares que atestiguan los intentos primerizos de dibujar la recta y el círculo. Esto muestra la importancia que los hombres le daban al arte y, de ahí, a la necesidad de las implementaciones geométricas para la elaboración de las pinturas rupestres.

Ante este panorama, es necesario reflexionar sobre el hecho de que desde el principio de la humanidad los artistas, desde los primeros hombres de las cavernas hasta los pintores más sofisticados, han siempre representado en sus dibujos figuras de tres dimensiones en una superficie de dos, eso, ha llevado, a la larga, a desarrollar el estudio de la *Perspectiva* que se originó en las primeras culturas, luego, a través de mucho tiempo, las grandes civilizaciones antiguas, mesopotámica, egipcia, hindú y griega pusieron las bases para su desarrollo, para que se fortaleciera y sistematizara en siglo XV. Así, mediante el desarrollo del Arte y la Arquitectura, del período renacentista, el estudio de la perspectiva se transformó en una disciplina, mediante la pintura y escultura, que dio origen a la *Geometría Proyectiva*; y más aún, para desembocar, en el siglo XX, en la representación de imágenes tridimensionales en las pantallas o monitores de los ordenadores electrónicos.

La naturaleza proporciona, sin lugar a dudas, una belleza geométrica sin igual, la sensación de placer y satisfacción que se obtiene al contemplar formas maravillosas, cascadas, lagos, selvas y mucho más, es analizada profundamente por los psicólogos, es inherente al ser humano. La contemplación de los aspectos armoniosos del mundo natural debió estimular la curiosidad de los hombres primitivos y la reflexión de esa belleza sin igual; esto puede entenderse mediante el enfoque Histórico Cultural de Vygotsky, quien estableció que en toda actividad humana existen dos componentes psicológicas superiores, la memoria y la imaginación, (Vygotsky 2006, Pag-32 y 33, Vygotsky 2003, Pag 3), es ahí, en la imaginación, donde sucede la estimulación creativa debida, desde luego, al entorno natural y social.

Así se llega a considerar que, en el hombre primitivo, la simetría, la multiplicidad, la regularidad de los procesos y los colores, debieron contribuir a la valoración de la belleza del mundo natural y, por supuesto, la curiosidad los condujo a tratar de dar sentido, cada vez mejor, a la variedad de las formas geométricas implícitas en la naturaleza. De ahí debe haber surgido el arte de la visión particular, de dónde si no, que cada uno se hizo de la realidad; pinturas al principio, esculturas después a la par de las construcciones cada vez más elaboradas que atestiguan su sensación y curiosidad ante un mundo lleno de extraordinaria belleza. Las sensaciones, la emoción y el gozo producido por la belleza de los objetos, están en relación directa con el estado consciente del sujeto y lo representado, de ahí surgió la transformación geométrica que el hombre plasma en sus pinturas, alteraciones geométricas que no parecen existir en la naturaleza. (Vygotsky 2006). Este patrón estético se repitió durante miles de años y, sin ser conscientes, los hombres primitivos desarrollaron la noción de recta, de círculo y otras muchas más, que fueron plasmadas en numerosas pinturas rupestres.

Tal vez en este punto sea necesario esclarecer la idea de imaginación en relación al hombre primitivo, misma que se necesita para explicar el desarrollo de la Geometría en la mente humana, que no es otra cosa que el resultado de los procesos psicológicos superiores, determinados por el mundo objetivo y el social. (Vygotsky 2006.) Algunos antropólogos han manifestado que los hombres primitivos, como el *Hombre de Toumai*, de 6 o 7 millones de años de antigüedad, y los *Australopitecos*, no tenían imaginación. EL genetista y antropólogo inglés Spencer Wells, de la Universidad de Harvard, autor de multitud de textos científicos sobre la diversidad genómica y las migraciones humanas, además de explorador residente de la Nacional Geographic Society, estableció que la imaginación, consecuencia del funcionamiento del cerebro, y por ello de la evolución del hombre, es exclusiva del ser humano. (Wells, 2007).

¿Qué quiere decir esto?... Hoy, sin dificultad, podemos imaginar cómo y a dónde estaremos el día de mañana, y no sólo eso, podemos imaginar qué instrumentos necesitaremos para estar mucho mejor. Si queremos ir de paseo, podemos imaginar cómo será, que debemos llevar, que debemos comprar y hasta podemos imaginarnos manejando un automóvil para llegar a pescar a un lago y, más aún, podemos visualizarnos en la estación de gasolina llenando el tanque de combustible, algo que aparentemente no tiene nada que ver con la pesca; es decir, podemos imaginar mucho más de lo que es nuestro mundo inmediato; y ya no digamos cómo es que imaginamos lo necesario para resolver un problema complejo de Geometría, cómo, en nuestras mentes, se suceden imágenes que representan la posible solución. Quizá sea bueno recordar el comentario de un grupo de estudiantes de Geometría que después de estudiar mucho, quizá por días, dijeron a sus profesores que la noche anterior a su examen no pudieron dormir porque en sus mentes "brincaban" números, rectas, planos, triángulos y mucho más. Pero los hombres primitivos no podían imaginar todo eso, ¡Hay argumentos antropomórficos y pruebas paleontológicas para ello! (Wells, 2007). Si uno de los miembros de la tribu se moría sencillamente lo aventaban fuera de la caverna, o aún peor, se lo comían, ¿Cómo imaginar a dónde fue? O ¿Y ahora

qué es? La imaginación, según nos cuentan los antropólogos y paleontólogos, surgió mucho después, quizá con el hombre de Neandertal o Cromañón. Eso es, según el antropólogo Wells, lo que caracteriza a la especie humana, la capacidad de poder imaginar formas geométricas, entre muchas otras cosas.

Pero entonces surge una reflexión más profunda sobre el origen del pensamiento abstracto, el origen del lenguaje que, sin lugar a dudas, favoreció el desarrollo de la Geometría. Todas las visiones espaciales, y el uso inconsciente de la perspectiva primitiva, por parte del hombre primitivo, dieron origen a la invención de palabras para determinar ideas geométricas; y entonces, ante el panorama de las primeras agrupaciones humanas, origen de las primeras civilizaciones, cabe la cuestión ¿Qué fue primero, el lenguaje o la aparición de la Geometría?

Quizá los símbolos numéricos, que pueden ser muescas en un hueso o el dibujo en una concha, y los utilizados para representar una idea fueron utilizados primero que las palabras; así comenzó el largo camino de la Aritmética a la par del lenguaje articulado. Con el tiempo los símbolos no sólo fueron marcas o pinturas en huesos y cuernos, nuestros propios dedos sirvieron para extender este simbolismo, con ello pronto se extendió el uso de los dedos para contar; esto es algo psicológico en los humanos, de ahí el origen del sistema decimal y de muchos otros. Con el avance del lenguaje articulado la noción de número fue cada vez más clara, debido, sin lugar a dudas, a la utilización de símbolos y a su relación con las palabras, apareció así ¡*Una aritmética Retórica!*

También la arquitectura, vista aquí como la construcción de chozas y viviendas primitivas, tuvo injerencia en el origen de la Geometría; las primeras chozas que los hombres primitivos construyeron muestran la utilización de innumerables elementos geométricos, por ejemplo, en el norte de África la construcción de las primeras chozas se desarrolló en torno a círculos, cuadros y disposiciones esencialmente simétricas. Así mismo, se han encontrado, en el norte de Canadá, restos de construcciones circulares que atestiguan el hecho de la facilidad, resistencia y versatilidad de un refugio con ésta forma, construidas incluso con arcos para el techo, arcos que no son otra cosa que colmillos de mamut, huesos de ballena o morsa; (Linton, 2014).

La observación de las formas geométricas convenientes y algo de intuición sobre la resistencia de los materiales motivó a los hombres primitivos a construir con formas geométricas más selectivas. Así surgió la *Geometría Sicológica*, es decir inconsciente, pero efectiva en la lucha por sobrevivir. Luego aparecieron colosales construcciones megalíticas, hechas de enormes bloques de piedra que determinaron formas geométricas muy sofisticadas; y es que la religión y superstición resultó un gran aliciente para la construcción colectiva de innumerables templos y monumentos y, con ello, la Astronomía resultó un ingrediente más en el desarrollo y consolidación de la Geometría. En qué grado influyó la Astronomía en el origen de la Geometría es algo para reflexionar con atención.

Luego de las primeras construcciones, los hombres primitivos no tardaron mucho en extender su interés al cielo, tratando de encontrar armonía y regularidad en el firmamento se enfrascaron en el estudio del cosmos; al principio el estudio no fue sistemático y tardó no menos de 10,000 años en organizarse; reconociendo formas y patrones de regularidad en él, obtuvieron multitud de datos que, si bien no tenían significado, ayudaron a crear el ambiente necesario para futuras interpretaciones. Con la imaginación, los antiguos hombres, pusieron en el cielo figuras y seres mágicos, crearon leyendas sobre ellas, dándole así un significado místico y religioso al estudio del cielo. Las figuras o constelaciones, que reconocemos en el firmamento, no están ahí, son impuestas por la mente que "ve" la geometría intrínseca en las formas; no podemos manipular estrellas, pero podemos hacerlo con la imaginación,

ese es el verdadero poder geométrico de la mente humana.

Desde tiempos muy antiguos los brujos, hechiceros y astrólogos de las primeras tribus pretendieron entender la mecánica del cielo con el fin de conocer las "Leyes Divinas", obteniendo así un poder sobrenatural, un poder sobre el humano común que no entendía nada relacionado con el cielo, a no ser su extraña belleza. Para entender esto imaginemos el poder de quienes podían predecir la fecha y tal vez la hora de un eclipse de Sol; qué sensación de horror para los pobladores al ver que el día se hace noche, que idea tendrían, después del suceso, de aquellos que predijeron el hecho, la "Profecía", los brujos proféticos ¡Se convirtieron en los representantes de los dioses en la tierra! El poder lo tenían quienes predijeran acontecimientos astronómicos espectaculares. Pero, ¿Cómo se pueden predecir eclipses solares? ¿Cómo desarrollar un calendario adecuado? ¿Cómo algo tan complicado era predicho con anticipación?... Muchas veces los antiguos ni siquiera entendieron lo que pasaba y sus métodos eran el resultado de muchísimas tradiciones, pero ¡Funcionaban! y eso era importante para seguir en la dirección correcta. Así nació la astrología, que dio origen a la Astronomía, y es evidente que no puede haber Astronomía sin Geometría, pues intentar hacer un estudio del cielo sin Geometría conduce a un desorden total en el entendimiento del cielo y de las leyes de la naturaleza cósmica. ¡Sin Geometría la Astronomía es astrología y superstición!

El estudio del firmamento comenzó con la observación y una detección de las regularidades, patrones que les daban "marcas" en el vasto océano de estrellas observadas a simple vista y que, de alguna manera, involucró a la Geometría, tal vez elemental sí, pero necesaria. Así lo confirman construcciones muy antiguas como los menhires de Stonehenge en Inglaterra o las gigantescas figuras de Nazca en los áridos valles occidentales de la cordillera de los Andes, al sur de Perú así como las construcciones de pirámides y templos, como el observatorio en Chichenitza, en Yucatán, México. Se ha especulado mucho sobre la construcción de Stonehenge, (5,000 a. de C.), no obstante, es probable que su función principal haya sido la de un calendario astronómico, no lo sabemos con certeza; muchas de las rocas que lo forman sirven de marcas para distintos eventos astronómicos, lo que confirma el intrincado patrón geométrico que ésta construcción megalítica tiene; aún hoy es posible observar, en el día más largo del año, 21 de junio, al amanecer un radiante Sol místico, "Círculo de Fuego", sobre la piedra del altar central y deducir de ello la relación tan estrecha entre Astronomía y Geometría.

Impresionante también es la forma en que se construyó Stonehenge, pues algunas rocas que lo forman pesan 200 toneladas, ¡No debe haber sido nada fácil! Pero pudo resolverse gracias a la observación geométrica que los hombres de la edad de piedra hicieron pues, evidentemente, se necesita de la Geometría para construir algo así, por lo menos debieron trazar la ruta por donde se trasladaron dichas rocas (Menhires y Dólmenes). Por lo visto quienes construyeron Stonehenge sabían más Geometría de lo que suponemos y esto casi siempre es así. Este fue el inicio quizá de una nueva raza, capaz de decidida perfección, que dio origen a la *Geometría Empírica* o ¿Deberemos creer que todo fue una gran casualidad?... Podemos imaginar que un arqueólogo se encuentra un Círculo de Fuego grabado en una piedra y luego de estudiarlo un poco mide su perímetro y su diámetro y los divide descubriendo asombrosamente que su relación es 3.1416. ¡Qué casualidad! ¿No?...Y piensa, ¡Esta vieja cultura, de hace miles y miles de años, sabían de la existencia de π !... Qué bobo pensar así, ¿No creen? Y sin embargo pueden suceder más cosas de lo que uno se imagina.

Hasta aquí, todo parece apuntar en la dirección de que la Geometría surgió de la naturaleza; sin embargo, dicho así parece como si se dijera que la Geometría estaba en la naturaleza. La Geometría, entendiéndose de una vez, no está inmersa en la naturaleza; claro se puede decir que π está en el tronco de

un árbol y que también está en el círculo del Sol o la Luna llena y, viéndolo mejor, que está en muchas partes, pero, ¿En verdad π está en la naturaleza?... En sus inicios se entendió a π como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, pero ¡La comparación o medición entre la longitud de la circunferencia y el diámetro la hacemos nosotros no la naturaleza!

Al principio los hombres de Neandertal y Cromañón utilizaron para sus construcciones los materiales disponibles en la naturaleza, las formas inherentes en ella, con el tiempo la geometría de sus construcciones cambió paulatinamente hasta desembocar en construcciones megalíticas y, posteriormente, en las pirámides que hay en todas las civilizaciones antiguas, Teotihuacana, Tolteca, Maya, Egipcia, China y muchas otras, pero entonces caemos en la cuenta de que tienen una geometría común. ¿Por qué las pirámides en todo el mundo se parecen? ¿Por qué tienen la misma geometría intrínseca?... Las culturas antiguas, en general, siempre supusieron que los dioses están relacionados esencialmente con el cielo, así tenemos al Dios Ra en el antiguo Egipto, a la representación del cielo con sus estrellas en la pirámide de *Qin Shi Huang*, en las llanuras de Qin Chuan en la provincia de Shaanxi de la China central, a *Tláloc* en Teotihuacán y a *Chac* en Uxmal y Chichenitza en la cultura precolombina Maya y, en general, todo lo relacionado con el cielo fue sagrado.

Las pirámides fueron construidas con su característica forma, en primer lugar, porque los materiales de construcción no tenían la resistencia de los materiales modernos, por eso no podían elevar mucho la construcción sin tener un colapso; en segundo lugar porque todas las culturas quisieron estar más cerca de los dioses, ¿Y cómo se logra esto? Pues hacia arriba, piensen solamente en la torre de Babel y de ahí se concluye el deseo de elevar más la construcción. Por ello tenemos a civilizaciones antiguas construyendo pirámides con plataformas, una sobre otra, o construyendo sobre lo ya construido y, sin querer, dando forma a las pirámides; es la forma más fácil de edificar sin correr el riesgo de que se derrumbe la construcción y de elevarse más.

Pero claro, entre más alto se quiera llegar la base deberá ser mayor y de ahí que se requiera de las plataformas y de esa geometría estructural esencial de la pirámide que conlleva a un problema de Geometría. Eso mismo pasó con las primeras pirámides de Egipto; al principio fueron poco elegantes, plataformas sobre plataformas, *Mastabas*, como la de Sakara en el Sahara, y luego se pusieron más y más plataformas, y sin querer, los lados se hacían cada vez más continuos, hasta que se obtuvieron las refinadas pirámides de Gizeh, y, motivados por un anhelo religioso y místico, las construcciones se hicieron piramidales; al final de cuentas se desarrolló una geometría, la necesaria estructuralmente, la de las pirámides, y a la vez una *Geometría Inconsciente*, por eso en todo el mundo se parecen.

Y ya que estamos en esto de los orígenes de la Geometría, un análisis más profundo sobre el cómo surgió nos hace reflexionar sobre las pruebas que tenemos de su origen y autenticidad y, más aún, de la interpretación que hacemos de ellas; las técnicas modernas de la Arqueología y de la Paleontología nos ofrecen pocos datos al respecto y todos estos son interpretados desde nuestra perspectiva geométrica actual, ¡Qué otra cosa sí no! Sólo podemos interpretar las pinturas y dibujos que el hombre prehistórico dejó bajo nuestro contexto histórico actual, bajo la óptica científica moderna, ¡Estamos, otra vez, en el campo de la *Paleogeometría*! Y con todo ello, puede ser, y muy bien, que no entendamos los verdaderos motivos por los cuales las civilizaciones hicieron tal o cual cosa, sólo podemos, de cierta forma, adivinar y aventurarnos en la interpretación del origen de sus ideas geométricas, en todo caso, eso es, una interpretación; sin embargo, los análisis y extensos trabajos hechos por epistemólogos, psicólogos, sociólogos y *Paleogeómetras* establecen un marco de referencia a partir del cual efectuamos

nuestro análisis.

No somos los primeros en tratar de saber el origen de la Geometría, el historiador antiguo griego Heródoto de Halicarnaso, en su libro 4, de los nueve libros de *Historia*, consideró que había tenido su origen en el antiguo Egipto, más o menos por el año 3,000 a. de C. y que se originó debido a la necesidad de remedir los límites de las parcelas que se perdían durante el desbordamiento del río Nilo; y que poco después se utilizó en la construcción de templos y pirámides. La construcción de las pirámides de Gizeh muestra la validez de ésta afirmación, ya que la Geometría fue necesaria para la construcción de tan sorprendentes monumentos. Todo esto está muy bien si consideramos que las grandes pirámides de Egipto se construyeron 2,600 años a. de C; pero hay quienes ponen en duda la validez de tal afirmación; el Dr. Robert Schoch, de la Universidad de Boston, el Egiptólogo John West y el Ingeniero Inglés Robert Bauval afirmaron, en 1994, que la construcción de las pirámides de Gizeh data del año 12,500 a. de C. lo que nos lleva a replantear la situación, y aún debemos considerar que la geometría necesaria para la construcción de las grandes pirámides egipcias debió desarrollarse mucho antes, quizá unos mil quinientos años atrás. (Bauval, 2008).

La Geometría no sólo comenzó porque se notaron ciertas similitudes entre las diferentes partes de los objetos geométricos, comenzó cuando el humano fue capaz de estructurar esas similitudes en forma racional, lo cual no significa que sea la única forma de entender el mundo; luego, la Geometría se sistematizó y desarrolló bajo esta perspectiva. Y entonces ¿Qué motivó el desarrollo y sistematización de la Geometría? ¿En qué momento fuimos conscientes de que se estaban estudiando las formas y relaciones geométricas de los objetos? En pocas palabras, ¿Qué condujo al ser humano a ser consciente de que estaba estudiando, sistematizando y estructurando la Geometría?... Un niño de siete u ocho años puede estar desarrollando un trabajo geométrico muy interesante sin ser consciente de que está estudiando, desarrollando y sistematizando, ya no digamos la Geometría, sino su propio conocimiento geométrico; ¿Qué lo motiva a estudiar Geometría? ¿Sus maestros? ¿Sus tareas o el interés que tiene en conocer el mundo? y ¿De dónde surge ese interés?... La Epistemología, la Psicología y muchas filosofías y ciencias modernas no acaban de dar una explicación satisfactoria a la difícil cuestión: ¿Qué motiva a alguien a ser tal o cual cosa? Una necesidad, sin duda, dirán muchos, mientras que otros piensan que una motivación origina una necesidad. No obstante, el problema de la motivación no es tan sencillo como parece, y entonces ¿Por qué nos interesa saber que motivó el estudio y desarrollo de la Geometría? Y tratándose de un fenómeno tan complejo, como el origen, sistematización y estructuración de la Geometría, la respuesta no es fácil, más aún, considerando que, en sus inicios, la Geometría no parece haber tenido ninguna motivación filosófica, a no ser la curiosidad inherente por la belleza de la naturaleza y por la sistematización del conocimiento que empíricamente adquirió el ser humano. Pero debe quedar claro, ante todo, que hay una gran diferencia intelectual entre hacer Geometría, sin saberlo, y ser consciente de que estamos haciendo Geometría, nos referimos a estructurarla y desarrollarla como parte integral de nuestra percepción; en el momento en que los humanos fueron conscientes de ello marcamos su inicio; antes de eso la llamamos *Geometría Primitiva*.

Y con todo, qué bueno resultaría que pudiésemos tener una *Tribu Prehistórica*, un eslabón perdido, como el de Piltdown, que pudiese conectar el origen de los conceptos de la Geometría a nuestra perspectiva actual, una *Tribu Prehistórica* por medio de la cual pudiésemos responder a muchas de las interrogantes planteadas por los epistemólogos, sociólogos y geómetras sobre el origen del pensamiento geométrico.

En este sentido, el de la geometría primitiva, es interesante mencionar que, en 1971 Manuel Elizalde, director de la Oficina de las Minorías en Filipinas, hizo el extraordinario anuncio de que se había des-

cubierto una *Tribu Prehistórica* en las selvas del Mindanao; según se determinó, la tribu de los Tasaday nunca había tenido contacto con ninguna civilización moderna. Los científicos, verdaderamente desconcertados por el hallazgo, construyeron plataformas en la selva, con la finalidad de que aterrizaran los helicópteros que llevaron gran cantidad de especialistas y reporteros. (Nance, 1975). La revista National Geographic Society dedicó un documental de una hora y una portada de su revista, agosto de 1972, a los Tasaday y la compañía norteamericana de televisión National Broadcasting Company Incorporated, NBC, ofreció 50,000 dólares por un documental de la *Tribu de la Edad de Piedra*.

Esta extraña tribu de hombres prehistóricos se paseaba por la selva totalmente desnuda y vivían en cavernas comiendo tallos, raíces e insectos de los árboles, peces crudos, frutas y verduras silvestres; y mucho menos pensar en la agricultura, y no parece que les preocupase la medición del tiempo. No se les encontraron armas, y lo más extraordinario es que, su pequeño léxico no incluía ninguna palabra para describir la guerra. (Nance, 1975). No obstante, en 1986 se logró establecer, por antropólogos y el periodista Suizo Oswald Iten que todo había sido una enorme farsa instrumentada por Elizalde y el presidente de Filipinas, Ferdinand Marcos, con la finalidad de devastar los recursos naturales de la región. Esto muestra la importancia que la sociedad, y particularmente la ciencia moderna, le da a la investigación sobre los orígenes de la cultura y, particularmente, al origen de los conceptos de la Geometría, no en balde se ofreció tanto dinero para lograr un reportaje sobre la vida de los Tasaday. ¡Imaginen lo que se podría descubrir del origen de la Geometría si pudiésemos encontrar en la actualidad una tribu, perdida en el tiempo, de hace 40,000!

Hoy los antropólogos aceptan que ya no existen las tribus perdidas, prehistóricas o aisladas, todo grupo humano moderno tiene o ha tenido, de una u otra forma, contacto con la cultura moderna.

Ante esta perspectiva, ¿Podemos determinar, analizando el desarrollo de la Geometría, el adelanto tecnológico de los pueblos de la antigüedad? ¿Podremos establecer los mecanismos que dieron surgimiento a los conceptos geométricos?... Quizá, pero primero debemos buscar los orígenes de la Geometría en las tribus prehistóricas, en el origen mismo de la civilización y, con ello, establecer mejores condiciones de análisis para esclarecer el ascenso cultural de los pueblos antiguos.

Todo esto nos hace reflexionar sobre el origen de la Geometría: ¿Cómo llegaron a existir los objetos de la Geometría? ¿De dónde provienen?, (Sánchez, 1988), ¿En qué momento fuimos conscientes y distinguimos entre círculo, esfera, cilindro y cono? ¿Están inmersos en la naturaleza? ¿Existían antes que nosotros? ¿Existirán por siempre? ¿De dónde proviene nuestra idea de espacio, de continuidad y temporabilidad? y, al final de cuentas, ¿Qué es la Geometría?.. Todas estas preguntas engloban ideas muy profundas que delimitan los problemas de la *filosofía matemática* y que, en los inicios de la Geometría no fueron esclarecidas; cuestiones sumamente importantes sobre el origen y motivación del conocimiento geométrico, que conllevan al esclarecimiento de la diferencia entre saber Geometría y saber que se está *haciendo Geometría*; en parte, todo esto, se refiere a la pregunta, profunda cuestión epistemológica, ¿En qué momento distinguimos entre círculo, esfera, cilindro y cono? ¿En qué momento se comenzó a distinguir a los objetos de la Geometría? En el contexto de la construcción de la Geometría bien podemos distinguir el evento histórico, quizá la época particular, en que los antiguos hombres comenzaron a utilizar la Geometría, pero no está muy claro en qué momento se dieron cuenta de que estaban desarrollando, estructurando y sistematizando la Geometría.

No cabe duda que la intención original de la Geometría fue el estudio y sistematización de los conocimientos relacionados con las formas espaciales del mundo objetivo; no obstante, si nuestra re-

flexión nos lleva a adentrarnos en el dominio de la Geometría entonces, ¿Qué estudia la Geometría?... pues en parte, sin duda, a los *objetos geométricos*; y entonces, ¿Qué debemos entender por *objeto geométrico*? Y ¿Cuáles son los objetos de estudio de la Geometría?... ¿Cuál es su objetivo?... ¿Cuáles son sus métodos? Todo esto nos lleva a pensar que, una primera aproximación de lo que se entiende por *objeto geométrico* tiene que ver con la abstracción, es decir, el reconocimiento de las propiedades esenciales que determinan a un o a una colección de objetos del mundo objetivo, pero no sólo eso, porque si fuese así también tendríamos que incluir a muchos otros conceptos, como los de la Ética, la Moral y mucho más; debe, entonces, haber algo más que determine cuando una abstracción es matemática y, más aún, cuando es geométrica. (Sánchez, 1988).

Una definición de *objeto geométrico* resulta sumamente compleja para desarrollarla aquí, no obstante, debe quedar claro que, de la multitud de geómetras y especialistas se puede determinar una multitud de definiciones todas igualmente probables y aceptables. Por ello y para los fines de esta reflexión se debe distinguir entre *objeto matemático fundamental* y *objeto matemático derivado*. Se entiende por objeto matemático fundamental una abstracción asociada a las relaciones cuantitativas o espaciales del mundo objetivo y, por ello, se entiende por *objeto geométrico fundamental* la abstracción asociada a las relaciones espaciales del mundo objetivo. Esta idea, de *objeto matemático fundamental*, es primeriza, ya que a partir de ella se hacen generalizaciones y, más aún, nuevas abstracciones; así por ejemplo, el espacio \mathbb{R}^3 no es más que una generalización sobre el *objeto matemático fundamental* de espacio euclídeo que, a su vez, es una abstracción sobre el espacio natural u objetivo. Con ello, los *objetos geométricos* de \mathbb{R}^n son subconjuntos de puntos de \mathbb{R}^n que son, nuevamente, una generalización de los objetos abstractos de *punto, distancia, línea, superficie, volumen* y, en general, de los *objetos geométricos de la Geometría Euclidiana* que, a su vez, son una abstracción de los objetos del espacio objetivo. Con ello caemos, otra vez, en la generalización y abstracción hecha sobre abstracciones que, a su vez, son hechas sobre las relaciones cuantitativas y espaciales.

Una vez que se reconocen los *objetos matemáticos fundamentales* es que se pueden efectuar generalizaciones u abstracciones sobre ellos; de ahí que, se entiende por *objeto matemático derivado* una generalización, numérica, espacial, estructural o lógica, sobre un o más *objetos matemáticos fundamentales* y, por ello, se entiende por *objeto geométrico derivado* una generalización u abstracción, espacial, estructural o lógica sobre uno o más *objetos geométricos fundamentales*. De esto se deduce que la Geometría estudia, relaciones, procedimientos y estructuras entre los *objetos geométricos*.

De todo ello se infiere que el proceso mental de abstracción es primero al de generalización, es decir, primero se determinan las características esenciales de un objeto y luego se generalizan. En esa forma llegamos a que, primero es el concepto y luego la definición, pero del concepto se puede determinar una nueva abstracción y llevarla a una generalización, lo que determina un nuevo concepto.

Luego entonces, no podemos esperar que las primeras agrupaciones humanas fueran capaces de reconocer la existencia de los *objetos geométricos*, que, por otra parte, falta probar que existen, (Sánchez, 1988), no en el sentido físico, y más aún, de que fueran conscientes de la sistematización incipiente de ellos. Todo el avance de la construcción de la teoría geométrica ha sido gradual, unas abstracciones determinan otras y, de ahí, nuevas generalizaciones, que dan origen a nuevas abstracciones y así sucesivamente, en una secuencia que a todas luces no tiene fin, pero que trasciende por niveles de conocimiento.

Y en el contexto del conocimiento social e individual sucede algo extraordinario, quizá al considerar que se puede establecer un paralelismo entre el conocimiento geométrico que el hombre construyó socialmente y en la forma en cómo lo construye el individuo, (Sierpiska, 1994). Esta extraordinaria

tesis es fundamental desde el punto de vista epistemológico, no obstante, hay que considerar que es, por su carácter social, muy difícil de probar. Este paralelismo entre el desarrollo epistemológico del conocimiento social del hombre y el desarrollo cognitivo del individuo salta a la vista cuando se reflexiona en la forma en cómo los hombres prehistóricos aprendieron a contar, cómo se desarrollaron los sistemas numéricos, cómo se desarrollaron las formas de representación, dibujos y gráficas, y en cómo, poco a poco, el conocimiento geométrico surgió para luego determinar su desarrollo y llegar, finalmente, a su formalización. Y entendiendo esto se ve que, el conocimiento en el individuo también surge, debido a sus acciones, luego se desarrolla para finalmente formalizarse.

Todo ello nos lleva aún a reflexionar; los neurólogos, psicólogos y científicos de las Neurociencias que estudian el funcionamiento del cerebro explican que éste funciona mediante dos *Hemisferios Cerebrales*, conectados a lo largo de una línea media que forman y que determina *El Cuerpo Calloso*. Estos hemisferios establecen la comprensión, las emociones, la creatividad, la memoria y el aprendizaje en el ser humano.

Los *hemisferios del cerebro* tienen funcionamientos un tanto diferentes y, no obstante, se coordinan para determinar una actividad común, aunque en general las diferencias pueden ser mínimas. Entre las funciones principales del *hemisferio cerebral izquierdo* se tienen, el análisis lógico deductivo y el establecimiento de las secuencias deductivas que le dan sentido a la realidad, incluyendo la conciencia lineal del tiempo; el establecimiento y la comprensión del habla y el lenguaje; la utilización de la lógica dual binaria, basada en categorías opuestas; el análisis de los elementos constitutivos de la realidad; el proceso de las relaciones y formas deductivas; la determinación y configuración lógica del espacio y la tendencia a la especialización, entre otras.

Mientras eso sucede, el *hemisferio cerebral derecho* se encarga de totalizar los elementos o partes de una situación, generalmente visual; determina los faltantes y completa los esquemas incompletos; establece una percepción global de las figuras y disposiciones espaciales; determina la formación de categorías visuales de los objetos e ideales, triángulos, cuadrados, es decir, establece la aproximación de la medida y proporciones así como la profundidad; determina el reconocimiento de formas, particularmente de rostros; es responsable de la memoria olfativa, un olor le recuerda formas al sujeto; este hemisferio no es consciente del tiempo, no obstante, generalmente se establece en él la imaginación y creatividad. (Puente, 2007).

Hay muchas hipótesis sobre cómo funciona cada hemisferio en el *pensamiento matemático*, y más aún en el geométrico. Hay una teoría que divide las formas de pensar en: *Secuencial Lineal y Simultaneidad Visual* ya sea que se utilice más el hemisferio izquierdo o derecho. (Puente, 2007). De acuerdo con esta teoría se tiene que los pensadores que utilizan más su hemisferio izquierdo sólo pueden analizar un esquema a la vez y sólo cuando ha terminado su análisis comienza el de otro. Mientras que los pensadores que utilizan más el hemisferio derecho pueden analizar simultáneamente varios esquemas y llegar a una conclusión. Por ejemplo si se quiere determinar, de entre una multitud de figuras geométricas, cuál es un fractal, el pensador que utiliza la *Secuencia Lineal*, un algebrista por ejemplo, tratará de analizar una por una las figuras hasta dar con el fractal, mientras que el pensador que utiliza la *Simultaneidad Visual*, un geómetra, determina un esquema general que le hace ver la diferencia y, con ello, al fractal; (Bartra, 2014). Mediante esta hipótesis surge la cuestión que involucra al algebrista y al geómetra, siendo ambos matemáticos, ¿Utilizan partes distintas del cerebro para resolver un mismo problema matemático?... Si es así, entonces, ¿La naturaleza del pensamiento matemático debe analizarse en función de los *hemisferios cerebrales*?

1.3 Conclusión

Como se ve, a través de esta reflexión, el origen de los conceptos de la Geometría ha sido determinado por la cultura y la influencia que ésta ha tenido sobre el individuo, que a su vez ha determinado el desarrollo cultural de los pueblos y civilizaciones antiguas. Tal desarrollo se basa en una *función generacional*. Así mismo, es de esperar que el origen de la Geometría esté determinado, en gran medida, por el desarrollo de las funciones psicológicas del individuo. De esto se desprende que la inteligencia del ser humano, y por ello su imaginación, es producto de la evolución del cerebro y, consecuentemente, de las acciones que el individuo determina sobre los objetos.

Por ello, los orígenes de la Geometría deben buscarse fundamentalmente en el origen y desarrollo de la cultura y la sociedad así como en la evolución psicológica de los hombres primitivos. Es mediante las acciones exteriorizadas que el hombre comenzó la elaboración de las pinturas rupestres que, de una forma u otra, lo llevaron a reconocer formas y relaciones, así como a instrumentar relaciones entre los objetos de la Geometría, nociones primero, conceptos después, lo que lo llevo al desarrollo de las acciones interiorizadas. Luego al desarrollo del lenguaje articulado y después al escrito, determinando un avance sustancial en el desarrollo de la Geometría. He ahí la importancia del estudio sobre el Origen, Sistematización y Formalización de los Objetos de la Geometría. De esto se desprende la importancia trascendental que tendría el descubrimiento de una tribu de hombres primitivos mediante la cual podrían determinarse muchos de los aspectos del origen y sistematización de los conceptos de la Geometría.

El objetivo inicial de la Geometría fue estudiar las formas, las configuraciones espaciales y las relaciones existentes entre los cuerpos naturales. No obstante, hoy la Geometría tiene por objetivo el estudio de los objetos geométricos sus relaciones y las estructuras que estos forman, distinguiéndose entre objetos geométricos fundamentales y derivados.

El estudio del origen de los conceptos de la Geometría se basa en los análisis antropomórficos y arqueológicos que sobre el hombre primitivo se tienen, no obstante, también hay que considerar los estudios morfológicos, psicológicos y antropomórficos actuales sobre el funcionamiento del cerebro humano, que nos muestran aspectos diferentes de los hemisferios cerebrales y, en cómo determinan el pensamiento matemático, tanto del Análisis Matemático como el de la Geometría Superior. Tratar de entender todo esto nos lleva a nuevas investigaciones y reflexiones que finalmente plantean nuevas preguntas, lo que nos lleva a comenzar, otra vez, replanteando nuestras ideas del origen de la Geometría.

Bibliografía

- [1] Bartra, R. (2014). *Antropología del cerebro. La conciencia y los sistemas simbólicos*. Ed. Fondo de Cultura Económica. México.
- [2] Bauval, R. (2008). *El misterio de Orión: Descubriendo el secreto de las pirámides*. Ed. Edaf. Madrid España.
- [3] Efimov, N. V. (1984). *Geometría superior*. Ed. Mir. Moscú, Rusia.
- [4] Kudriavtsev, L. D. (1983). *Curso de análisis matemático*. Ed. Mir. Moscú, Rusia.

- [5] Latorre, J; Pascual, P; Tarrach, R. (1994). *Speed of Light in Non Trivial Vacua*. Ed. Departamento de Estructura y Constituyentes de la Materia. Facultad de Física de la Universidad de Barcelona, España. Disponible en: http://arxiv.org/PS_cache/hep-th/pdf/9408/9408016v1.pdf
- [6] Linton, R. (2014). *Estudio del hombre*. Ed. Fondo de Cultura Económica. México. 2014.
- [7] Losee, J. (1981). *Introducción histórica a la filosofía de la ciencia*. Ed. Alianza Universidad. Alianza Editorial. España.
- [8] Lubbock, J. (1913). *Prehistoric times: As illustrated by ancient remains and the manners and customs of modern savages*. Editorial: New York, H. Holt and Co.; London, Williams & Norgate. Referencias en: <http://es.wikipedia.org/wiki/Paleol%C3%ADtico>.
- [9] Nance, J. (1975). *The gentle Tasaday: A Stone Age people in the Philippine rain forest*. Ed. Harcourt Brace Jovanovich. New York. EUA.
- [10] Puente, A. E. (2007). "La historia incompleta del descubrimiento de la división cerebral y Roger W. Sperry". *Suma Psicológica*, **Vol. 14**, **núm. 2**, septiembre, 2007, pp. 225-231. Ed. Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá, Colombia.
- [11] Russell, B. (1945). *Introducción a la filosofía matemática*. Ed. Losada. Buenos Aires Argentina.
- [12] Russell, B. (1977). *Los principios de la matemática*. Ed. Espasa-Calpe, S. A. Madrid, España.
- [13] Sánchez F. C. (1988). *Conferencias sobre problemas filosóficos y metodológicos de la matemática*. Ed. Facultad de Superación en Ciencias Naturales. Universidad de la Habana.
- [14] Serres, M. (1996). *Los orígenes de la geometría*. Ed. Siglo XXI Editores.
- [15] Sierpiska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Basingstoke. Ed. Falmer. Londres, Inglaterra.
- [16] Tallizina, N. (2000). *Manual de psicología y pedagógica*. San Luis Potosí, México: Editorial Facultad de Psicología. Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México.
- [17] Vygotsky, L. S. (2003). *La imaginación y el arte en la infancia*. Ed. Akal, Barcelona, España.
- [18] Vygotsky, L. S. (2006). *Psicología del arte*. Ed. Paidós. Barcelona, España.
- [19] Wells, S. (2007). *El viaje del hombre. una odisea genética*. Editorial Océano, Barcelona, España. (Disponible en video. <https://www.youtube.com/watch?v=Lmp95BG0-Ss>).