El Método de Exhausión de Arquímedes y las Funciones Trigonométricas

Geovanny Sanabria
Escuela Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Santiago Cambronero
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica.

Resumen:

Con base en el método de exhausión de Arquímedes y un poco de intuición, se establecen sucesiones recurrentes que permiten definir de manera analítica tanto el número π como las funciones trigonométricas. Se trata de explorar el enfoque intuitivo que lleva a una primera definición de las funciones trigonométricas, que se puede formalizar con las herramientas elementales del análisis real.

Palabras Clave: método de exhausión, funciones trigonométricas, número pi, polígonos regulares, continuidad, sucesiones y monotonía

Arquímedes de Siracusa y el Método de Exhausión

La información que se tiene sobre la vida y obras de Arquímedes, es basta en relación con otros matemáticos de la antigüedad. Sin embargo, la veracidad de mucha de esta información se pone en tela de duda debido a su mezcla con historias fantasiosas, estimuladas por sus asombrosas invensiones.

A continuación se brindará una síntesis de los principales acontecimientos que marcaron la vida y obra de este ilustre matemático, a partir principalmente del libro *Protagonistas de la civilización: Arquímedes,* de la editorial Debate/Itaca. El lector interesado puede concultar dicha fuente para más información. El objetivo de esta síntesis, es brindar el marco contextual del método de exahusión, una de las más grandes contribuciones de Arquímedes.

Su vida y obras

Arquímedes nació en Siracusa alrededor del año 287 A.C. Una vez realizados sus primeros estudios, se dirigió a Alejandría, mayor centro de estudios del momento, a completar su formación en matemática y sus aplicaciones.

Alejandría tenía una posición extratégica como centro de las vías comerciales con el Oriente, y con la producción agrícola del Valle del Nilo. Fue gobernada por el general Tolomeo I tras la muerte del emperador Alejandro Magno, aproximadamente en el año 323 A.C. Tolomeo y sus progenitores se preocuparon por reforzar la vida cultural de su reino, producto de esto se construyeron las dos instituciones alejandrinas más importantes: la biblioteca de Alejandría y el museo de Alejandría, que favorecieron el flujo de científicos y artistas de la época.

A su llegada a Alejandría, Arquímedes se encontró con una matemática desarrollada principalmente por la obra de Euclides, quien había muerto pocos años antes. Durante el tiempo que permaneció en esta ciudad, hizo amistadades con los más grandes científicos de la época.

Una vez completados sus estudios, regresó a su ciudad natal movido principalmente por dos factores: en primer lugar, el desarrollo de la cultura propiciado por el Rey Hieron II en Siracusa; en segundo lugar, su originalidad no tenía cabida en la cultura cerrada de Alejandría, que no consideraba al técnico como un auténtico científico [1].

La asociación de la figura de Arquímedes con un técnico, se debía a que sus descubrimientos matemáticos se valían del empleo simultáneo de la matemática y la mecánica, además sus demostraciones seguían el modelo deductivo euclideano con precisión, sin caer en una rigurosidad total. Así, Arquímedes se valía de dos métodos: la intuición para la invención y la rigurosidad para la demostración que aprendió en su estancia en Alejandría.

Una vez en Siracusa, Arquímedes mantuvo contacto con algunos científicos alejandrinos a los cuales les enviaba sus descubrimientos matemáticos, primeramente al astrónomo y matemático Conón de Samos, su maestro en Alejandría. Sus escritos se caracterizaban por el uso del método de exhausión, el cual permitió que sus demostraciones alcanzaran la rigurosidad exigida por Alejandría.

Arquímedes supera la geometría tradicional al plantear nuevos problemas geométricos, como por ejemplo la cuadratura del segmento parabólico, que envió a Alejandría en dos secciones, en la primera se describe el procedimiento mecánico que utilizó para obtener el resultado (intuición) y en la segunda se demuestra vía el método de exhausión dicho resultado (rigurosidad). Además, en su libro *Sobre las Espirales*, demostró varios problemas que años atrás había propuesto a los alejandrinos y estos no pudieron demostrar.

Entre sus obras matemáticas se pueden mencionar además: *De la esfera y el cilindro*, *Medida del círculo*, *Conoides y esferoides*. En sus obras, Arquímides reflejaba un estilo de escritura dirigido no solo a especialistas como lo hizo Euclides. Su escritura es clara y omite algunos pasajes que considera evidentes.

Arquímedes realizó también importantes descubrimientos e invenciones en el campo de la mecánica y la astronomía. En la mecánica, uno de sus principales inventos fue la cóclea o ``tornillo sin fin'', que permite elevar agua sin dificultad. Otros inventos son el órgano hidráulico y la gran nave de Hieron, entre otros.

Entre sus descubrimientos en la física, se encuentra el famoso *Principio de Arquímedes*: ``Todo cuerpo sumergido en un líquido, recibe un impulso hacia arriba equivalente al peso del líquido desalojado''. También se destaca su trabajo del equilibrio de los planos, en el que emplea el concepto de centro de gravedad. Ambos descubrimientos son demostrados rigurosamente en sus libros: *Sobre el equilibrio de los planos*, *De los cuerpos Flotantes*.

Entre los resultados obtenidos por Arquímedes en el campo de la astronomía, se encuentra el método que utilizó para medir el diámetro del sol y su relación con el diámetro de la Luna, además previó para tiempos no muy largos los eclipses de Sol y de Luna. También demostró su originalidad y creatividad en el campo militar, principalmente en la construccion de armas que permitieron la defensa de Siracusa de los ataques romanos durante ocho meses.

Arquímedes muere en el año de 212 A.C. en manos de un soldado romano, cuando Siracusa es tomado por el cónsul Marcelo del Imperio Romano, este le rinde honores fúnebres.

El método de exhausión

Este método consiste en considerar determinada magnitud de una figura, como el límite de las magnitudes correspondientes de figuras inscritas y circunscritas en ella, las cuales aproximan arbitrariamente la figura original.

Arquímedes establece que, por medio de este método, se logra descubrir las propiedades buscadas, demostrándolas rigurosamente por medio de la reducción al absurdo. Así, para demostrar que dos magnitudes A y B son iguales, él supone que A es mayor o menor que B, considerando cada caso por separado:

> En el caso que A es mayor que B, utiliza la idea del método de exhausión para hallar una sucesión T_n con las siguientes características: no posee último término, todos los términos de la sucesión son menores que las magnitudes A y B, y los términos de la sucesión tienden hacia la magnitud mayor A. Al hallar esta sucesión, Arquímedes llega a una contradicción, pues por la última propiedad existe un elemento de la sucesión T_n cuya diferencia con A es menor que $D = A - B$, por lo que T_n sería mayor que B y esto contradice la segunda característica de la sucesión.

Este esquema de demostracción es el que Arquímedes utiliza para darle rigor a sus teoremas, y además respeta el principio de la geometría abstracta de que ningún problema del infinito puede ser reducido a lo finito. Se observa entonces como el método utilizado por Arquímedes supone la existencia del infinito, aunque sin mencionarlo directamente, alejándose de la investigación infitesimal. El párrafo del libro ``Arquímedes Protagonistas de la Civilización'' aclara la relación del concepto de infinito y el método de exhausión:

"..., los antiguos se valen solo para afirmar que se puede inscribir en el círculo un polígono cuya diferencia del propio círculo sea más pequeña que cualquiera otra magnitud establecida. Desde este punto en adelante el resto de la demostración se convierte en una reducción al absurdo de la tesis contraria, reducción que podría evitarse introducciendo precisamente el concepto de límite, pero no hubo modo de introducirlo, porque todavía contenía demasiados equívocos para los matemáticos de la época. Procedían estos de manera más rígida que los modernos, porque para cada caso se hacía necesaria una demostracción especial, lo que aumentaba en mucho la dificultad de sus investigaciones. El método de exhausión disminuye en parte esas dificultades, y tiene el mérito de haber legitimado los resultados de las primeras investigaciones infinitesimales cuando todavía era imperfecta la crítica de los conceptos fundamentales que las inspiraron."

De esta forma, Arquímedes introduce los procedimientos que serán, varios siglos después, la base del cálculo diferencial.

Como se mencionó en el apartado anterior, la metodología de investigación de Arquímedes consistía en dos fases, una fase intuitiva donde empleaba consideraciones mecánicas y su método intuitivo; y una fase rigurosa en la cual empleaba consideraciones de tipo infinitesimal y su método de exhausión. En su libro *Del método relativo a los Teoremas mecánicos*, explica los procedimientos a los que se ajustaba en la fase intuitiva y se lo envía a Eratósteles, docto de Alejandría, con el fin de hacerlo público. Este libro va acompañado con una carta, en la cual se señala la importancia de su método, pese a que no se cuenta con demostraciones verdaderas, y concluye la carta señalando:

> *"Estoy convencido de que aportará una utilidad nada pequeña a las matemáticas; en efecto, confío en que algunos de los matemáticos actuales o del futuro, habiéndoles demostrado mi método, encontrarán otros teoremas no imaginados todavía por nosotros."*

Por otro lado, el método de exhausión le permitió a Arquímedes establecer la rigidez tradicional exigida por los griegos a sus descubrimientos intuitivos. Precisamente el método de exhausión no permite hallar nuevas verdades, es decir carece de valor heurístico, por lo que Arquímedes lo utilizaba para dar rigor a los resultados obtenidos por la vía intuitiva.

Lastimosamente el libro *Del método relativo a los Teoremas mecánicos*, cae en el olvido por los griegos. Incluso en el renacimiento, los científicos más conocedores de la obra de Arquímedes, como Galileo, no conocián la existencia de ese libro. Para ellos, la metodología empleada por este tenía una vía secreta. Este libro se da a conocer hasta 1907, cuando el matemático Heiberg, luego de copiar y examinar el escrito original junto con otros textos de Arquímedes que halló en la Biblioteca del Monasterio del Santo Sepulcro en Jerusalem, ubicada en Constantinopla, anuncia su descubrimento bajo el título *Un nuevo libro de Arquímedes.*

El método de exhausión como base para ciertas construcciones

Arquímedes utilizó el método de exhausión para hallar aproximaciones del número π, logrando determinar que $3+10/71<\pi<3+1/7$. Para desarrollar este método primero inscribió un hexágono regular en una circunferencia; posteriormente halló el punto medio de cada uno de los arcos formados por los lados del hexágono, y finalmente trazó los segmentos que unen cada uno de esos puntos medios con los vértices del lado correspondiente, formando así un dodecágono. De esta forma, duplicando sucesivamente el número de lados, llegó hasta un polígono de 96 lados. Un proceso similar desarrolló con polígonos circunscritos. Designando con I_n y C_n los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos respectivamente, Arquímedes llegó a la conclusión de que

$$C_{2n}=\frac{2C_nI_n}{C_n+I_n}, \qquad I_{2n}=\sqrt{C_{2n}\cdot I_n}. \tag{1}$$

Arquímedes considera el círculo como un polígono regular de un número infinito de lados, en el que la apotema se va convirtiendo en el radio. Esta consideración hace que se pueda justificar fácilmente la fórmula para el área de un círculo de radio r a partir de la expresión para el área de un polígono regular. En efecto, por definición se tiene que $\pi=\dfrac{C}{2r}$, donde C es el perímetro del círculo, así que $C=2\pi r$. Asumiendo que la fórmula del área de un polígono regular es válida para el círculo, se tendría:

$$A=\frac{\text{perímetro}\cdot\text{apotema}}{2}=\frac{2\pi r\cdot r}{2}=\pi r^2.$$

En este trabajo, se utilizará la metodología propuesta por Arquímedes, proponiendo con base en la intuición una sucesión numérica A_n que representa el área de un polígono regular de 2^n lados, inscrito en un círculo de radio $r=1$. El teorema de Weierstrass de análisis real se encarga del paso al límite, dando rigor a las definiciones involucradas.

Aspectos prelimilinares

- Comentarios sobre polígonos regulares
- Densidad de los Diádicos
- Un poco de intuición

Comentarios sobre polígonos regulares

Considere un polígono regular de n lados inscrito en un círculo dado de centro O. El centro de dicho círculo es llamado también centro del polígono. Un ángulo central del polígono es un ángulo central del cículo, determinado por dos vértices consecutivos del polígono. Por congruencia de triángulos, todos los ángulos centrales son congruentes, y por lo tanto cada uno mide $\frac{2\pi}{n}$ radianes.

Considere un lado del polígono, denotado por $\overline{AB}$, y trace el rayo que parte del centro O y pasa por el punto medio de ese lado. Dicho rayo interseca a la circunferencia en un punto E (ver figura 1.a).

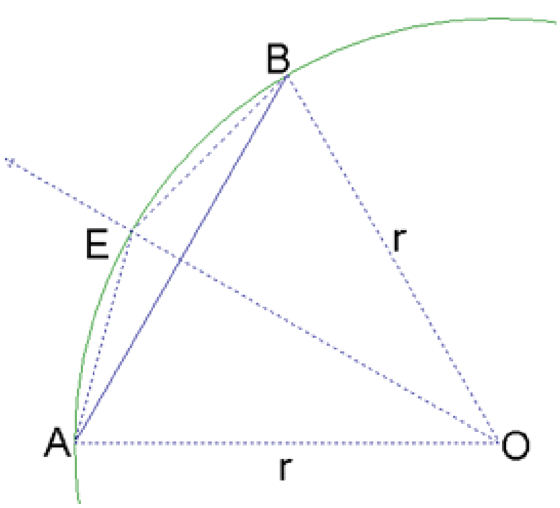


Figura 1.a

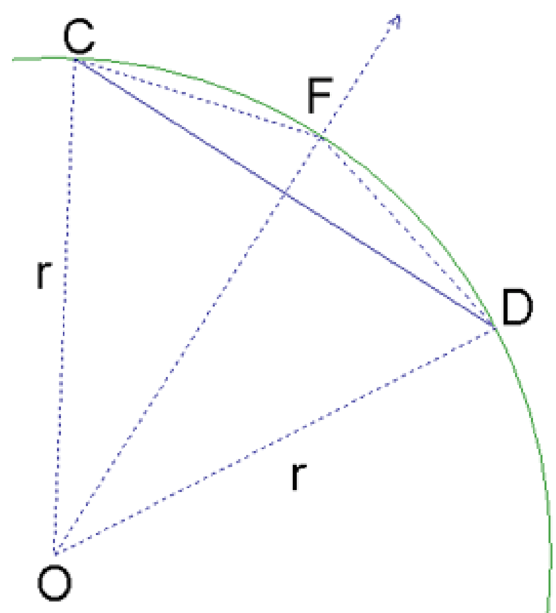


Figura1.b

Por el cirterio lal, se tiene que los triángulos OBE y OAE son congruentes, y en particular $AE = BE$. Dado otro lado cualquiera del polígono ($\overline{CD}$ en la figura 1.b), como los ángulos centrales tienen la misma medida, entonces por el mismo criterio se obtiene que $AE = BE = CF = DF$.

De esta forma se construye un polígono regular de $2n$ lados. Repitiendo el proceso indefinidamente, se construye una sucesión de polígonos regulares inscritos en el círculo, cada uno de los cuales tiene el doble de lados que el anterior. En adelante, estos polígonos se denominarán **polígonos de Arquímedes,** y al método para construirlos se le llamará **método de exhausión.** En la construcción a presentar, se comenzará con un cuadrado en vez de un hexágono regular, obteniendo sucesivamente polígonos de 2^n lados, para cada número natural n. Para la construcción es importante recordar la densidad de los diádicos.

Densidad de los Diádicos

Es conocido que dado un entero $b \geq 2$, para todo número real positivo x existe una expansión de x en base b, de la forma $a_0, a_1 a_2 \ldots$, donde $a_0 = [\![x]\!]$, y para $n \geq 1$ se tiene que $a_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, esto es:

$$x = a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \ldots.$$

Más precisamente se tiene, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$a_0 + \frac{a_1}{b} + \ldots + \frac{a_n}{b^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{b} + \ldots + \frac{a_n}{b^n} + \frac{1}{b^n}.$$

En lo que sigue se tomará $b = 2$. En tal caso se habla de expansiones binarias. Además, para cada $n \geq 1$ se tiene $a_n \in \{0, 1\}$. Para detalles sobre este tema, consultar [4].

Dado $x > 0$, con expansión binaria $a_0, a_1, a_2, \ldots$, se definen las sucesiones (ρ_n) y (σ_n) así:

$$\rho_n = a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}, \qquad \sigma_n = \rho_n + \frac{1}{2^n}.$$

Por lo anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\rho_n \leq x < \sigma_n.$$

Note que (ρ_n) es creciente, dado que $a_n \geq 0$ para cada n, y además (ρ_n) converge a x.

De igual forma, la sucesión (σ_n) resulta decreciente, debido a que

$$\sigma_{n+1} = \rho_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} = \rho_n + \frac{a_{n+1}+1}{2^{n+1}} \leq \rho_n + \frac{2}{2^{n+1}} = \sigma_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

También es claro que (σ_n) converge a x.

Se define el conjunto de los Diádicos como

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Cada ρ_n pertenece al conjunto $\mathbb{D}$. En efecto, $\rho_n = a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} = \frac{k}{2^n}$, donde

$$k = a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + \ldots + a_{n-1} 2 + a_n.$$

Eso demuestra que todo $x \geq 0$ se puede aproximar arbitrariamente por elementos del conjunto $\mathbb{D}$.

Mejor aún, existen sucesiones (ρ_n) y (σ_n), cuyos elementos pertenecen todos a $\mathbb{D}$, la primera creciente y la segunda decreciente, tales que $\rho_n \to x$ y $\sigma_n = \rho_n + \frac{1}{2^n} \to x$. Si $x < 0$, se puede aplicar lo anterior a $-x$, para obtener el mismo resultado. Lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1 *El conjunto $\mathbb{D}$ es denso en $\mathbb{R}$. Más precisamente, para todo $x \in \mathbb{R}$ existen dos sucesiones de diádicos (ρ_n) y (σ_n), la primera creciente y la segunda decreciente, tales que $\rho_n \leq x \leq \sigma_n$, para cada n, y*

$$x = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n.$$

Un poco de intuición

A continuación utilizaremos algunas de las fórmulas básicas de polígonos, con el fin de encontrar una manera de construir las funciones *seno* y *coseno*.

Consideremos un polígono regular de 2^n lados, inscrito en un círculo de radio 1. Este polígono se divide en 2^n triángulos, formados al trazar todos los radios a los vértices del polígono, y sus ángulos centrales miden $\frac{\pi}{2^{n-1}}$ radianes. En la figura 2 se muestra un lado $\overline{PQ}$ del polígono y el triángulo que forma.

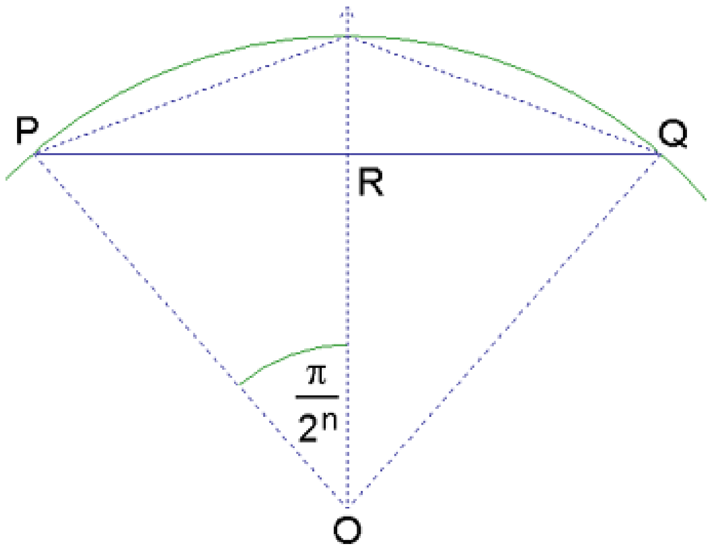


Figura 2

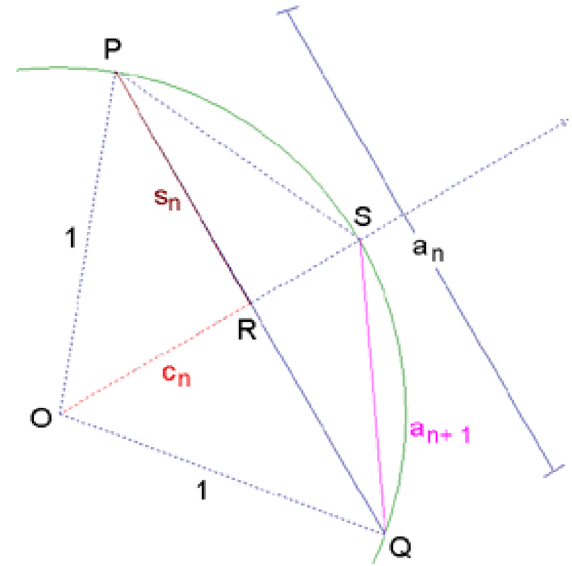


Figura 3

Se observa que el triángulo POQ es isósceles debido a que dos de sus lados son radios del círculo, por lo tanto al trazar la altura del triángulo que pasa por O, esta biseca al $\angle POQ$. Así se obtiene que $m\angle POR = \frac{\pi}{2^n}$.

Además, se nota que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{PR}{PO} = PR, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{RO}{PO} = RO$$

Nótese que entonces, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ es la mitad de la medida del lado del polígono de 2^n lados, y $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ es la apotema del mismo polígono. Esta es la base intuitiva de la construcción que desarrollaremos.

En adelante denotaremos con H_n a un polígono de Arquímedes de 2^n lados, inscrito en un círculo de radio 1. La medida de sus lados se denota por a_n, su apotema por c_n, y se define s_n como la mitad de la medida de su lado, es decir $s_n = \frac{a_n}{2}$. Note que el semiperímetro es $2^n s_n$.

En la figura 3 se muestra uno de los lados del polígono H_n y su relación con uno de los lados del polígono H_{n+1}.

Como el triángulo OPQ es isósceles, entonces $PR = RQ = s_n$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OPR se obtiene

$$s_n^2 + c_n^2 = 1,$$

de donde se obtienen las identidades:

$$c_n = \sqrt{1 - s_n^2}, \qquad s_n = \sqrt{1 - c_n^2}. \tag{2}$$

Estudio de las sucesiones s_n y c_n

Definición recursiva de las sucesiones

Consideremos ahora el triángulo rectángulo QRS de la figura 3; las medidas de sus lados son:

$$QR = s_n, \qquad QS = a_{n+1} \qquad y \qquad RS = 1 - c_n.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras de nuevo se obtiene:

$$a_{n+1}^2 = s_n^2 + (1 - c_n)^2 = s_n^2 + 1 - 2c_n + c_n^2 = 2\left(1 - c_n\right).$$

Por lo tanto

$$a_{n+1}^2 = 2\left(1 - c_n\right), \qquad s_{n+1}^2 = \frac{a_{n+1}^2}{4} = \frac{1 - c_n}{2}.$$

De lo anterior se sigue que:

$$c_{n+1} = \sqrt{1 - s_{n+1}^2} = \sqrt{1 - \frac{1 - c_n}{2}} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}}.$$

Esto nos da la fórmula de recurrencia para las apotemas de los polígonos de Arquímedes. Se tiene entonces:

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}, \qquad s_{n+1} = \sqrt{\frac{1-c_n}{2}}.$$

Aunque no se utilizará, esto implica una fórmula de recurrencia para los s_n :

$$s_{n+1}^2 = \frac{1-c_n}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-s_n^2}\right).$$

El caso del cuadrado

Considere el caso particular $n = 2$. Entonces c_2 es la apotema de un cuadrado inscrito en un círculo de radio 1, que es igual a la mitad de la medida del lado s_2, es decir $c_2 = s_2$; véase la figura 4:

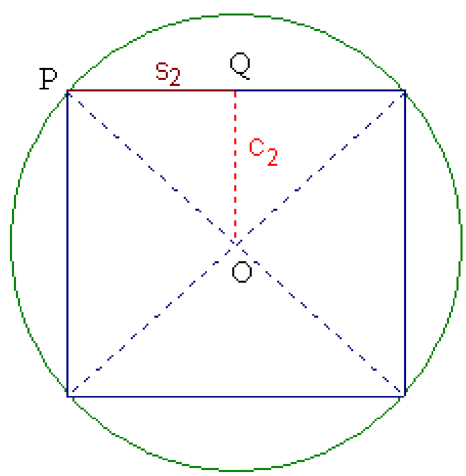


Figura 4

El triángulo OPQ es rectángulo isósceles de hipotenusa 1, por lo tanto aplicando el teorema de Pitagóras se obtiene $c_2 = s_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Aunque geométricamente no tiene sentido hablar de c_1 y s_1 (pues no hay poligonos de 2^1 lados), se puede hallar una definición de estos de manera que las fórmulas de recurrencia sean válidas con $n = 1$:

$$c_2 = \sqrt{\frac{1+c_1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1+c_1}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0,$$

y luego $s_1 = \sqrt{1-c_1^2} = 1$. Se define entonces $c_1 := 0$ y $s_1 := 1$.

Resumen de lo que se tiene.

Para un polígono de 2^n lados inscrito en un círculo de radio 1, su apotema c_n está definida recursivamente de la siguiente forma:

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = \sqrt{\tfrac{1+c_n}{2}}. \tag{3}$$

La medida de la mitad de su lado se denota por s_n, y está definida en términos de la apotema por:

$$s_n = \sqrt{1 - c_n^2}.$$

A continuación se estudian algunos límites importantes asociados con estas sucesiones.

Algunos límites

Lema 1 *La sucesión* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definida recursivamente por (3), es creciente y converge a* 1.

Prueba

Se demostrará por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene : $c_n < c_{n+1} < 1$.

Para empezar se tiene $c_1 = 0 < c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$. El paso inductivo se sigue de las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned} c_{n-1} < c_n < 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1+c_{n-1}}{2} < \frac{1+c_n}{2} < \frac{1+1}{2} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1+c_{n-1}}{2}} < \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} < 1 \\ &\Rightarrow \quad c_n < c_{n+1} < 1. \end{aligned}$$

Por el teorema de Weierstrass se sigue que (c_n) es convergente, y denotando por l su límite se tiene:

$$l = \lim_{n\to\infty} c_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+l}{2}}.$$

Finalmente, resolviendo esta ecuación se obtiene $l = 1$. Esto demuestra que efectivamente

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1. \ \square$$

Lo anterior calza con nuestra intuición ya que la medida de la apotema del polígono inscrito en un círculo de radio 1 está siempre entre 0 y 1; conforme se duplica la cantidad de lados, la apotema tiende a la medida del radio, que en este caso es $r = 1$.

Nótese que $s_n = \sqrt{1 - c_n^2}$, y por lo tanto se obtiene como corolario el siguiente lema.

Lema 2 *La sucesión* (s_n) *es una sucesión decreciente, y converge a 0.*

Identidades para recordar

Ya se ha mencionado la identidad pitagórica:

$$s_n^2 + c_n^2 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note además que:

$$c_n^2 - s_n^2 = \frac{1+c_{n-1}}{2} - \frac{1-c_{n-1}}{2} = c_{n-1}. \tag{5}$$

Similarmente se tiene

$$s_{n-1} = 2 s_n c_n. \tag{6}$$

El número π y el área del círculo.

- [Área del polígono de Arquímedes]
- [Perímetro de los polígonos de Arquímedes]
- [Convergencia de las sucesiones P_n y Q_n]

- [Una definición de π]
- [Área y perímetro del círculo de radio r]

Área del polígono de Arquímedes

Utilizando la fórmula del área del polígono:

$$A_n = \textit{semiperímetro} \cdot apotema,$$

se obtiene el área A_n del polígono H_n, dado que su *semiperímetro* es $2^n \cdot s_n$ y la *apotema* es c_n,

$$A_n = 2^n s_n c_n$$

Utilizando la fórmula (6) se obtiene

$$A_n = 2^n s_n c_n = 2^{n-1} s_{n-1},$$

y de esto se deduce que

$$A_{n+1} = 2^n s_n = \frac{A_n}{c_n}. \tag{7}$$

Como $c_n < 1$, la identidad (7) demuestra que $A_n < A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión (A_n) es estrictamente creciente.

Perímetro de los polígonos de Arquímedes

Para cada polígono (inscrito) de Arquímedes H_n, se forma un polígono circunscrito J_n que se obtiene al trazar las tangentes al círculo en cada vértice de H_n. Estas tangentes se intersecan en ciertos puntos que forman los vértices de J_n. El segmento que une cada vértice de J_n con el centro, biseca al lado correspondiente de H_n.

Considere un lado del polígono circunscrito, denotado por $\overline{PQ}$. En la figura 5 se tiene que los triángulos OAE y OPA son semejantes, ya que sus ángulos correspondientes son congruentes.

Entonces

$$AP = \frac{AP}{1} = \frac{AP}{AO} = \frac{EA}{EO} = \frac{s_n}{c_n},$$

y entonces el lado del polígono J_n mide $\frac{2s_n}{c_n}$. El perímetro del polígono inscrito es

$$P_n = 2^n \cdot 2s_n = 2 \cdot 2^n s_n = 2A_{n+1},$$

mientras que el perímetro del polígono circunscrito es

$$Q_n = 2^n \cdot 2\frac{s_n}{c_n} = \frac{P_n}{c_n} = \frac{2A_{n+1}}{c_n}.$$

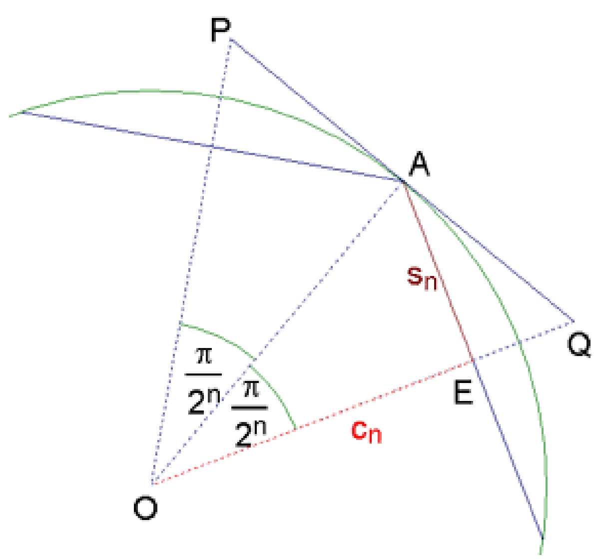


Figura 5

Nótese que

$$\frac{2Q_nP_n}{Q_n + P_n} = \frac{2Q_nP_n}{Q_n + Q_nc_n} = \frac{2P_n}{1 + c_n} = \frac{2A_{n+1}}{c_{n+1}^2} = \frac{2A_{n+2}}{c_{n+1}} = Q_{n+1},$$

y similarmente

$$\sqrt{Q_{n+1} \cdot P_n} = \sqrt{\frac{2A_{n+2}}{c_{n+1}} \cdot 2A_{n+1}} = 2\sqrt{A_{n+2}\frac{A_{n+1}}{c_{n+1}}} = 2A_{n+2} = P_{n+1}.$$

Tomando $I_{2^n} = P_n$, $C_{2^n} = Q_n$, estas identidades son las obtenidas por Arquímedes (ver (1)).

Convergencia de las sucesiones P_n y Q_n

Dado que (A_n) es creciente entonces la sucesión (P_n) también lo es. En efecto,

$$P_n = 2A_{n+1} > 2A_n = P_{n-1}.$$

Por otro lado, de (7) se sique que:

$$\frac{Q_n}{Q_{n+1}} = \frac{2A_{n+1}/c_n}{2A_{n+2}/c_{n+1}} = \frac{A_{n+1}}{A_{n+2}} \cdot \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_{n+1}A_{n+2}}{A_{n+2}} \cdot \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_{n+1}^2}{c_n} = \frac{1+c_n}{2c_n}.$$

Como $c_n < 1$, se tiene $1 + c_n > 2c_n$, de donde

$$\frac{Q_n}{Q_{n+1}} = \frac{1+c_n}{2c_n} > 1.$$

Esto demuestra que la sucesión (Q_n) es decreciente.

Además, como $c_n < 1$ se tiene que $Q_n = \dfrac{P_n}{c_n} > P_n$, acorde con la intuición (el perímetro del polígono circunscrito es mayor que el del polígono inscrito).

Por lo tanto, las sucesiones (P_n) y (Q_n) están acotadas, pues para cada n se tiene:

$$P_1 < P_n < Q_n < Q_1.$$

Por el teorema de Weierstrass, las sucesiones (P_n) y (Q_n) son convergentes, y como además $Q_n = \frac{P_n}{c_n}$ y $c_n \to 1$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} Q_n. \tag{8}$$

Una definición de π

El número π se define como el cociente del perímetro de un círculo y su diámetro. Este es el punto de partida para establecer una definición rigurosa de este número.

Según nuestra definición intuitiva de π, si se denota el perímetro del círculo con C (recuerde que el diámetro es 2), se obtiene:

$$P_n < C < Q_n \Rightarrow \frac{P_n}{2} < \frac{C}{2} < \frac{Q_n}{2} \Rightarrow \frac{P_n}{2} < \pi < \frac{Q_n}{2},$$

y tomando en cuenta la identidad (8), se debe definir:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{2} = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Lo anterior completa el análisis intuitivo que fundamenta la siguiente definición.

Definición: Se define

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n s_n c_n = \lim_{n\to\infty} 2^n c_n \sqrt{1-c_n^2},$$

donde c_n está definida recursivamente por (3).

Nótese que

$$\pi = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2^n s_n.$$

Ahora que ya se ha definido π, es importante notar que el área del polígono circunscrito es:

$$2^n \cdot \frac{s_n}{c_n} = \frac{2^n \cdot s_n \cdot c_n}{c_n^2} = \frac{A_n}{c_n^2}.$$

El área del círculo, que denotaremos por A_c, debe satisfacer:

$$A_n \leq A_c \leq \frac{A_n}{c_n^2},$$

y como $\lim \frac{A_n}{c_n^2} = \lim A_n = \pi$, se debe tener:

$$A_c = \lim_{n \to \infty} A_n = \pi,$$

como era de esperarse.

Lo anterior demuestra que:

1. El número π es el límite del conciente entre el perímetro P_n y el diámetro $d = 2$.

2. El número π es el límite del área A_n del polígono de Arquímedes, de 2^n lados.

Área y perímetro del círculo de radio r

Considere un polígono regular de 2^n lados, inscrito en un círculo de radio r. Al aplicar el teorema de Pitágoras se obtiene la relación entre la apotema $\widehat{c}_n$ del polígono y la midad de la medida de su lado $\widehat{s}_n$:

$$\widehat{s}_n^2 + \widehat{c}_n^2 = r^2, \text{ de donde } \widehat{s}_n = \sqrt{r^2 - \widehat{c}_n^2}.$$

Al igual que con c_n, se obtiene la fórmula de recurrencia para $\widehat{c}_n$:

$$\widehat{c}_{n+1} = \sqrt{\frac{r\,(r + \widehat{c}_n)}{2}}, \qquad \widehat{c}_1 = 0.$$

Siguendo el mismo procedimiento descrito en la sección 4.2, se obtiene un polígono circunscrito al círculo de radio r cuyo lado mide:

$$2r\frac{\widehat{s}_n}{\widehat{c}_n}.$$

Se puede demostrar por inducción que:

$$\frac{\widehat{c}_n}{r} = c_n, \quad \frac{\widehat{s}_n}{r} = s_n.$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{c}_n = \lim_{n\to\infty} r \cdot c_n = r \lim_{n\to\infty} c_n = r.$$

Se denotan con $\widehat{P}_n$ y $\widehat{Q}_n$ los perímetros del polígono inscrito y circunscrito respectivamente, entonces:

$$\widehat{P}_n = 2^n \cdot 2\widehat{s}_n = 2^{n+1} \cdot r \cdot s_n = 2rA_{n+1} = rP_n.$$

$$\widehat{Q}_n = 2^n \cdot 2r\frac{\widehat{s}_n}{\widehat{c}_n} = 2r\frac{2^n s_n}{c_n} = \frac{2rA_{n+1}}{c_n} = rQ_n.$$

Por (8), las sucesiones $(\widehat{P}_n)$ y $(\widehat{Q}_n)$ son convergentes y además:

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{P}_n = \lim_{n\to\infty} \widehat{Q}_n = \pi r$$

Note que el perímetro del círculo $\widehat{C}$ debe cumplir:

$$\widehat{P}_n < \widehat{C} < \widehat{Q}_n,$$

y tomando el límite se obtiene la conocida fórmula del perímetro del círculo de radio r :

$$\widehat{C} = \lim_{n\to\infty} \widehat{P}_n = \lim_{n\to\infty} 2rA_{n+1} = 2\pi r.$$

En particular, para cualquier círculo de radio r, el cociente de su perímetro y su diámetro es constante:

$$\frac{\widehat{C}}{2r} = \pi.$$

Por otro lado, denotando con $\widehat{A}_n$ el área del polígono inscrito se obtiene:

$$\widehat{A}_n = \frac{\widehat{P}_n \cdot \widehat{c}_n}{2}.$$

y el área del circunscrito es:

$$\frac{\widehat{A}_n}{\widehat{c}_n}.$$

Note que:

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{A}_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\widehat{A}_n}{\widehat{c}_n}.$$

Entonces, el área $\widehat{A}_c$ del círculo de radio r debe definirse por:

$$\widehat{A}_c = \lim_{n \to \infty} \widehat{A}_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\widehat{P}_n \cdot r \cdot c_n}{2} = \pi r^2.$$

Se concluye entonces que el área del círculo de radio r es πr^2, y su perímetro es $2\pi r$.

Construcción de las funciones trigonométricas

La intuición de la sección 3, junto con las sucesiones definidas en el mismo, permiten establecer una definición rigurosa de las funciones trigonométricas. La idea es definir primero sen $\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ usando las sucesiones c_n y s_n; luego se definen estas funciones por inducción en cada punto de la forma $\frac{k\pi}{2^n}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Finalmente se realiza el paso a todo $\mathbb{R}$ usando densidad.

Para simplificar la presentación, se construirán primero funciones C y S y al final se define

$$\operatorname{sen}(x) = S\left(\frac{x}{\pi}\right), \quad \cos(x) = C\left(\frac{x}{\pi}\right).$$

Construcción de las funciones S y C en el conjunto $\mathbb{D}$

Sea $\mathbb{D}_1 = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Se definen las funciones $C : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{R}$ y $S : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$C\left(\tfrac{1}{2^n}\right) = c_n, \qquad S\left(\tfrac{1}{2^n}\right) = s_n.$$

De acuerdo con las propiedades de las sucesiones obtenidas anteriormente, se deducen algunas identidades:

1. Dado que $s_n^2 + c_n^2 = 1$ se tiene $C^2\left(\frac{1}{2^n}\right) + S^2\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1$, es decir

$$C^2(x) + S^2(x) = 1, \text{ para } x \in \mathbb{D}_1.$$

2. Similarmente se tiene $C^2\left(\frac{1}{2^n}\right) - S^2\left(\frac{1}{2^n}\right) = C\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$, debido a que $c_n^2 - s_n^2 = c_{n-1}$. Esto es, para $x \in \mathbb{D}_1$ se tiene:

$$C^2(x) - S^2(x) = C(2x).$$

3. La igualdad $s_{n-1} = 2s_n c_n$ se convierte en $S\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 \cdot S\left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot C\left(\frac{1}{2^n}\right)$, es decir

$$S(2x) = 2 \cdot S(x) \cdot C(2x), \text{ para } x \in \mathbb{D}_1.$$

Se intentará definir $C\left(\frac{k}{2^n}\right)$ y $S\left(\frac{k}{2^n}\right)$ por inducción sobre k. Lo más conveniente sería:

$$\begin{aligned} C\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right) &= C\left(\tfrac{k}{2^n}\right) C\left(\tfrac{1}{2^n}\right) - S\left(\tfrac{k}{2^n}\right) S\left(\tfrac{1}{2^n}\right), \\ S\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right) &= S\left(\tfrac{k}{2^n}\right) C\left(\tfrac{1}{2^n}\right) + C\left(\tfrac{k}{2^n}\right) S\left(\tfrac{1}{2^n}\right), \qquad \forall k = 0, 1, 2 \ldots \end{aligned}$$

Esta definición sin embargo requiere de ciertos cuidados. Por ejemplo, cuando $k = n = 2$, volvemos a definir $C\left(\frac{1}{2}\right)$, que ya se había definido con $k = n = 1$. En general, en el paso n, se redefinen todos los valores que se habían definido en el paso $n-1$. Debemos entonces verificar que la nueva definición coincide con la anterior, en cada paso. Para evitar problemas de notación en este sentido, es mejor adoptar el siguiente enfoque:

Definimos primero, para cada n, funciones C_n y S_n de acuerdo con la definición recursiva que se tiene, en el conjunto

$$\mathbb{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Luego se verificará que para cada n, C_n extiende a C_{n-1}, y S_n extiende a S_{n-1}.

Finalmente se definirán C y S en el conjunto

$$\mathbb{D}^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{D}_n,$$

como la "unión" de estas funciones.

- Definición recursiva de C_n y S_n
- Definición de C y S en $\mathbb{D}^+$
- Extensión de C y S a todo $\mathbb{D}$

Definición recursiva de C_n y S_n

Se parte de la definición recursiva que se hizo de $C\left(\frac{1}{2^n}\right)$ y $S\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Se definen para n fijo:

$$C_n(0) = 1, \qquad S_n(0) = 0,$$

y para $k = 0, 1, \ldots$ se define:

$$\begin{aligned} C_n\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right) &= C_n\left(\tfrac{k}{2^n}\right) c_n - S_n\left(\tfrac{k}{2^n}\right) s_n, \\ S_n\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right) &= S_n\left(\tfrac{k}{2^n}\right) c_n + C_n\left(\tfrac{k}{2^n}\right) s_n. \end{aligned}$$

Note que $C_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = c_n$ y $S_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = s_n$, tomando $k = 0$. En particular $C_1\left(\frac{1}{2}\right) = c_1 = 0$ y $S_1\left(\frac{1}{2}\right) = s_1 = 1$.

Teorema 2 *Las funciones C_n y S_n satisfacen:*

1. Para $x \in \mathbb{D}_n : C_n^2(x) + S_n^2(x) = 1$

2. Para $x, y \in \mathbb{D}_n$:
$$\begin{aligned} C_n(x+y) &= C_n(x) C_n(y) - S_n(x) S_n(y), \\ S_n(x+y) &= S_n(x) C_n(y) + C_n(x) S_n(y) \end{aligned}$$

3. Si además $x \geqslant y$ se tiene
$$\begin{aligned} C_n(x-y) &= C_n(x) C_n(y) + S_n(x) S_n(y), \\ S_n(x-y) &= S_n(x) C_n(y) - C_n(x) S_n(y) \end{aligned}$$

Prueba

1. La demostración de la identidad pitagórica se deja como ejercicio.

2. Con $y = \frac{j}{2^n}$, se procede por inducción sobre j. Para $j = 0$ las igualdades son evidentes. En el paso inductivo, se asume que son válidas para j, y se demuestran para $j+1$ (donde $x = \frac{k}{2^n}$ está fijo). Para hacer eso, se

aplica primero la definición:

$$C_n\left(\frac{k+j+1}{2^n}\right) = C_n\left(\frac{k+j}{2^n}\right)c_n - S_n\left(\frac{k+j}{2^n}\right)s_n.$$

El primer término a la derecha es, por hipótesis de inducción:

$$C_n\left(\frac{k+j}{2^n}\right)c_n = \left[C_n\left(\frac{k}{2^n}\right)C_n\left(\frac{j}{2^n}\right) - S_n\left(\frac{k}{2^n}\right)S_n\left(\frac{j}{2^n}\right)\right]c_n,$$

mientras que el segundo es

$$S_n\left(\frac{k+j}{2^n}\right)s_n = \left[S_n\left(\frac{k}{2^n}\right)C_n\left(\frac{j}{2^n}\right) + C_n\left(\frac{k}{2^n}\right)S_n\left(\frac{j}{2^n}\right)\right]s_n.$$

Al restar y reagrupar estos términos se obtiene:

$$\begin{aligned} C_n\left(\frac{k+j+1}{2^n}\right) &= C_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\left[C_n\left(\frac{j}{2^n}\right)c_n - S_n\left(\frac{j}{2^n}\right)s_n\right] \\ &\quad -S_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\left[S_n\left(\frac{j}{2^n}\right)c_n + C_n\left(\frac{j}{2^n}\right)s_n\right] \\ &= C_n\left(\frac{k}{2^n}\right)C_n\left(\frac{j+1}{2^n}\right) - S_n\left(\frac{k}{2^n}\right)S_n\left(\frac{j+1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Esto demuestra la primera fórmula para $j+1$, y para la segunda se procede similarmente.

3. Como $x \geqslant y$, aplicamos las identidades de la parte **2,** con $x-y$ en vez de x. Se obtiene

$$\begin{aligned} C_n(x-y)\,C_n(y) - S_n(x-y)\,S_n(y) &= C_n(x) \\ S_n(x-y)\,C_n(y) + C_n(x-y)\,S_n(y) &= S_n(x). \end{aligned}$$

Este es un sistema lineal en las variable $C_n(x-y)$, $S_n(x-y)$, cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} C_n(y) & -S_n(y) \\ S_n(y) & C_n(y) \end{pmatrix}.$$

Al resolver este sistema se obtienen las identidades deseadas. □

Tomando $y=x$ en la identidad **2** se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 1 *Para* $x \in \mathbb{D}^+$ *se tiene* $C(2x) = C^2(x) - S^2(x)$, $S(2x) = 2S(x)C(x)$.

Lema 3 *Para cada* n, C_n *es una extensión de* C_{n-1} *y* S_n *es una extensión de* S_{n-1}.

Prueba

Note que $C_n(0) = C_{n-1}(0)$, y $S_n(0) = S_{n-1}(0)$. Además, por el corolario anterior se tiene

$$C_n\left(\tfrac{1}{2^{n-1}}\right) = c_n^2 - s_n^2 = c_{n-1} = C_{n-1}\left(\tfrac{1}{2^{n-1}}\right),$$

y similarmente $S_n\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = S_{n-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$. Se debe demostrar que

$$C_n\left(\tfrac{j}{2^{n-1}}\right) = C_{n-1}\left(\tfrac{j}{2^{n-1}}\right), \quad S_n\left(\tfrac{j}{2^{n-1}}\right) = S_{n-1}\left(\tfrac{j}{2^{n-1}}\right),$$

para todo j. Se aplicará inducción sobre j. Asumiendo que esto se cumple para cierto j, se tiene:

$$\begin{aligned} C_n\left(\tfrac{j+1}{2^{n-1}}\right) &= C_n\left(\tfrac{j}{2^{n-1}}\right)C_n\left(\tfrac{1}{2^{n-1}}\right) - S_n\left(\tfrac{j}{2^{n-1}}\right)S_n\left(\tfrac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= C_{n-1}\left(\tfrac{j}{2^{n-1}}\right)C_{n-1}\left(\tfrac{1}{2^{n-1}}\right) - S_{n-1}\left(\tfrac{j}{2^{n-1}}\right)S_{n-1}\left(\tfrac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= C_{n-1}\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Se ha usado aquí el teorema 2, y la hipótesis de inducción. Para S_n se procede de manera similar. □

Definición de C y S en $\mathbb{D}^+$

Se definen ahora las funciones C y S en el conjunto $\mathbb{D}^+$ de la siguiente manera. Si $x = \frac{k}{2^n} \in \mathbb{D}^+$, se define

$$C(x) := C_n(x) = C_n\left(\tfrac{k}{2^n}\right), \quad S(x) := S_n(x) = S_n\left(\tfrac{k}{2^n}\right).$$

El lema anterior demuestra que esta definición no es ambigua, pues si $x = \frac{k}{2^n} = \frac{j}{2^m}$, entonces una de las funciones C_n ó C_m extiende a la otra, y consecuentemente $C_n(x) = C_m(x)$. Note que en particular $C\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

$S\left(\frac{1}{2}\right)=1.$

Ahora, dados $x,y\in\mathbb{D}^{+}$, se tiene $x\in\mathbb{D}_n$, $y\in\mathbb{D}_m$, y Se puede suponer que $n\geq m$. Entonces ambos x,y pertenecen a $\mathbb{D}_n$, y por el teorema 2:

$$C^2(x)+S^2(x)=C_n^2(x)+S_n^2(x)=1.$$

De manera similar se demuestran las propiedasdes **2** y **3** del teorema 2 para $x,y\in\mathbb{D}^{+}$. En resumen se tiene:

Teorema 3 *Las funciones C y S que acabamos de definir en $\mathbb{D}^{+}$ satisfacen:*

1. Para cada $x\in\mathbb{D}^{+}: C^2(x)+S^2(x)=1$
2. Para $x,y\in\mathbb{D}^{+}: C(x+y)=C(x)C(y)-S(x)S(y),\quad S(x+y)=S(x)C(y)+S(y)C(x).$
3. Si además $x\geqslant y: C(x-y)=C(x)C(y)+S(x)S(y),\quad S(x-y)=S(x)C(y)-S(y)C(x)$

Extensión de C y S a todo $\mathbb{D}$

Vamos a definir ahora C y S en

$$\mathbb{D}^{-}=\{x\in\mathbb{D}:x<0\},$$

de manera que las identidades del teorema 3 sean válidas en todo $\mathbb{D}$. Deberá tenerse en particular

$$C(-x)=C(0-x)=C(0)\,C(x)-S(0)\,S(x)=C(x),$$

y similarmente $S(-x)$ debe ser $-S(x)$. Esto nos deja con la siguiente definición. Para $x\in\mathbb{D}^{-}$ se define

$$C(x):=C(-x),\quad S(x):=-S(-x).$$

Es decir, la función C se define en $\mathbb{D}^{-}$ de manera que sea par, mientras que S se define de manera que sea impar.

Propiedades de las funciones S y C en $\mathbb{D}$

La definición de S y C en $\mathbb{D}^-$ dada en la sección anterior, es necesaria si queremos que se cumpla el teorema 3 para todo $x,y\in\mathbb{D}$. Sin embargo, debemos demostrar que es suficiente. Por ejemplo, si $x\in\mathbb{D}^+$, $y\in\mathbb{D}^-$ se sigue que $-y\in\mathbb{D}^+$. Consideramos dos casos:

- Si $x\geqslant -y$ entonces

  $$C\left(x+y\right)=C\left(x-\left(-y\right)\right)=C\left(x\right)C\left(-y\right)+S\left(x\right)S\left(-y\right)=C\left(x\right)C\left(y\right)-S\left(x\right)S\left(y\right),$$

  donde hemos usado la propiedad **3** del teorema 3.

- Si $x<-y$ tenemos

  $$C\left(x+y\right)=C\left(-y-x\right)=C\left(-y\right)C\left(x\right)+S\left(-y\right)S\left(x\right)=C\left(x\right)C\left(y\right)-S\left(x\right)S\left(y\right).$$

Para S se procede de manera similar, y el caso en que ambos x,y son negativos es más sencillo.

Teorema 4 *Las funciones C y S que acabamos de definir en $\mathbb{D}$ satisfacen:*

1. Para cada $x\in\mathbb{D}$: $C^2(x)+S^2(x)=1$
2. Para $x,y\in\mathbb{D}$: $C(x+y)=C(x)C(y)-S(x)S(y), \quad S(x+y)=S(x)C(y)+S(y)C(x)$.

Corolario 2 *Para $x,y\in\mathbb{D}$ se tiene*

$$C\left(2x\right)=C^2\left(x\right)-S^2\left(x\right),\quad S\left(2x\right)=2S\left(x\right)C\left(x\right).$$

Nótese que en particular

$$C\left(1\right)=C^2\left(\tfrac{1}{2}\right)-S^2\left(\tfrac{1}{2}\right)=-1,\quad S\left(1\right)=2S\left(\tfrac{1}{2}\right)C\left(\tfrac{1}{2}\right)=0.$$

A continuación se demuestran algunas propiedades que el lector posiblemente conoce de su intuición geométrica.

Teorema 5 *Para $x,y\in\mathbb{D}$ se tiene:*

1. $C\left(\frac{1}{2}+x\right)=-S\left(x\right),\quad S\left(\frac{1}{2}+x\right)=C\left(x\right)$,
2. $C\left(\frac{1}{2}-x\right)=S(x),\quad S\left(\frac{1}{2}-x\right)=C\left(x\right)$,

3. $C(x+1) = -C(x)\,, \quad S(x+1) = -S(x)$,

4. Las funciones C y S son periódicas de período 2 en el conjunto $\mathbb{D}$.

Prueba

Las partes **1, 2** y **3** son consecuencias directas del teorema anterior. Para demostrar **4** usamos **3**:

$$C(x+2) = C((x+1)+1) = -C(x+1) = C(x)\,,$$

y similarmente con la función S. $\square$

- Intervalos de monotonía
- Algunas identidades y desigualdades importantes

Intervalos de monotonía

En general, cuando se quiere extender una función de un conjunto denso a todo $\mathbb{R}$, es necesario que esta cumplan ciertas propiedades, como que sea continua o monótona. En la presente sección demostraremos que las funciones C y S son monótonas en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, y luego demostraremos que son continuas en el origen. Las propiedades demostradas arriba, nos ayudarán a deducir las correspondientes en el paso al límite. El resultado siguiente es de gran ayuda.

Lema 4 *Una función* $f : \mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *es creciente si y solo si satisface lo siguiente:*

$$f\left(\frac{k}{2^n}\right) \leq f\left(\frac{k+1}{2^n}\right), \quad \text{para } x = \frac{k}{2^n} \in \mathbb{D} \cap \left[0, \tfrac{1}{2}\right[. \tag{9}$$

Además, f *es estrictamente creciente si y solo si cumple (9), con desigualdad estricta.*

Prueba

Es claro que si f es creciente en $\mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$, entonces saisface la propiedad (9). Recíprocamente, si f satisface (9), se toman $x, y \in \mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Existen n, m tales que $x \in \mathbb{D}_n$ y $y \in \mathbb{D}_m$. Se puede asumir que $n \geq m$, en cuyo caso $\mathbb{D}_m \subseteq \mathbb{D}_n$. Se tiene entonces que $x = \frac{j}{2^n}$, $y = \frac{k}{2^n}$. Si $x \leq y$, entonces se tiene $j \leq k$, y luego

$$f\left(\frac{j}{2^n}\right) \leq f\left(\frac{j+1}{2^n}\right) \leq ... \leq f\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

La segunda parte se demuestra de manera casi idéntica, cambiando $\leq$ por $<$. $\square$

Ahora recuerde que la sucesión (c_n) es creciente, y que (s_n) es decreciente. Se usará esto, y el lema anterior para demostrar que las funciones C y S son monótonas en $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{D}$, la primera decreciente y la segunda creciente. Para eso se demostrará por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$C\left(\tfrac{k}{2^n}\right) > C\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right), \quad S\left(\tfrac{k}{2^n}\right) < S\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right), \ \forall k = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1. \tag{10}$$

Para $n = 0$ se debe mostrar que $C(0) > C\left(\frac{1}{2}\right)$ y $S(0) < S\left(\frac{1}{2}\right)$, lo cual es evidente.

Asumiendo que (10) es válida para n, se demostrará para $n+1$. Note que la hipótesis de inducción implica en particular que

$$0 = S(0) < S\left(\tfrac{k}{2^n}\right), \ \ C\left(\tfrac{k}{2^n}\right) > C\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0, \text{ para } k \in \left\{0, \ldots, 2^{n-1}\right\}.$$

Sea $k \in \{0, \ldots, 2^n\}$. Si k es impar, se tiene $k = 2j+1$ para algún j, y entonces

$$C\left(\tfrac{k}{2^{n+1}}\right) = C\left(\tfrac{2j}{2^{n+1}}\right) c_{n+1} - S\left(\tfrac{2j}{2^{n+1}}\right) s_{n+1} = C\left(\tfrac{j}{2^n}\right) c_{n+1} - S\left(\tfrac{j}{2^n}\right) s_{n+1}$$

Como $c_{n+1} > c_n$ y $s_{n+1} < s_n$ se sigue que

$$C\left(\tfrac{k}{2^{n+1}}\right) > C\left(\tfrac{j}{2^n}\right) c_n - S\left(\tfrac{j}{2^n}\right) s_n = C\left(\tfrac{j+1}{2^n}\right) = C\left(\tfrac{k+1}{2^{n+1}}\right).$$

Si k es par, se tiene $k = 2j$ para algún j, y entonces

$$C\left(\tfrac{k+1}{2^{n+1}}\right) = C\left(\tfrac{2j+1}{2^{n+1}}\right) = C\left(\tfrac{j}{2^n}\right) c_{n+1} - S\left(\tfrac{j}{2^n}\right) s_{n+1} < C\left(\tfrac{j}{2^n}\right) c_{n+1}.$$

Como $c_{n+1} < 1$ se tiene

$$C\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) < C\left(\frac{j}{2^n}\right) = C\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right).$$

En ambos casos se obtiene la desigualdad deseada para la función C. Para S se procede de manera similar. Se ha demostrado que (10) se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el lema 4 se obtiene que C es decreciente estrictamente en cada $\mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$, mientras que S es estrictamente creciente en el mismo conjunto. En resumen:

Teorema 6 *En $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{D}$ la función C es estrictamente decreciente, mientras que la función S es estrictamente creciente. En particular se tiene $1 > C(x) > 0$ y $0 < S(x) < 1$, para $x \in \mathbb{D} \cap \left]0, \frac{1}{2}\right[$.*

Ahora recuerde que por el teorema 5 se tiene

$$C\left(\tfrac{1}{2} + x\right) = -S(x), \quad S\left(\tfrac{1}{2} + x\right) = C(x).$$

Cuando x recorre $\mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $x + \frac{1}{2}$ recorre $\mathbb{D} \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Como C decrece en $\mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$, se sigue que $S(x)$ lo hace en $\mathbb{D} \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Por otro lado, como S crece en $\mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$, se sigue que $C(x)$ decrece en $\mathbb{D} \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Las identidades

$$S(1 + x) = -S(x), \quad C(1 + x) = -C(x)$$

se pueden usar de la misma forma para deducir el comportamiento en el conjunto $\mathbb{D} \cap [1, 2]$. Finalmente, por ser estas funciones periódicas de período 2, el comportamiento en todo $\mathbb{D}$ queda determinado por este teorema vía traslaciones. Por ejemplo, la función C es estrictamente creciente en $\mathbb{D} \cap [7, 8]$, dado que $C(x - 6) = C(x)$, y $x - 6 \in \mathbb{D} \cap [1, 2]$ para $x \in \mathbb{D} \cap [7, 8]$.

Teorema 7 *Para cada entero n, la función C es estrictam*

ente decreciente en $\mathbb{D} \cap [2n, 2n + 1]$ y estrictamente creciente en $\mathbb{D} \cap [2n - 1, 2n]$. La función S es estrictamente creciente en $\mathbb{D} \cap \left[2n - \frac{1}{2}, 2n + \frac{1}{2}\right]$, y estrictamente decreciente en $\mathbb{D} \cap \left[2n + \frac{1}{2}, 2n + \frac{3}{2}\right]$.

Algunas identidades y desigualdades importantes

Recordemos que $(2^n s_n)$ es una sucesión creciente que converge a π, y por lo tanto debe tenerse en particular $2^n s_n \leq \pi$, además es claro que $-\pi \leq 2^n s_n$, así

$$-\pi x \leq S(x) \leq \pi x, \quad \text{para } x = \frac{1}{2^n}.$$

Esta desigualdad se sigue por inducción para todo $x \in \mathbb{D}^+$. En efecto, si $S\left(\frac{k}{2^n}\right) \leq \frac{k\pi}{2^n}$, se sigue que

$$S\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = S\left(\frac{k}{2^n}\right) c_n + C\left(\frac{k}{2^n}\right) s_n \leq \frac{k\pi}{2^n} + \frac{\pi}{2^n} = \frac{(k+1)\pi}{2^n},$$

donde usamos que $C(x) \leq 1$ para cada $x \in \mathbb{D}^+$, y la hipótesis de inducción. Además, si $\frac{-k\pi}{2^n} \leq S\left(\frac{k}{2^n}\right)$ como $c_n \leq 1$ y $C\left(\frac{k}{2^n}\right) \geq -1$, se tiene

$$S\left(\frac{k}{2^n}\right) c_n \geq \frac{-k\pi}{2^n} c_n \geq \frac{-k\pi}{2^n}, \quad s_n C\left(\frac{k}{2^n}\right) \geq -s_n \geq -\frac{\pi}{2^n},$$

y por lo tanto

$$S\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = S\left(\frac{k}{2^n}\right) c_n + C\left(\frac{k}{2^n}\right) s_n \geq -\frac{(k+1)\pi}{2^n}.$$

Así, se obtiene el siguiente lema.

Lema 5 *La función S satisface $-\pi x \leq S(x) \leq \pi x$, para cada $x \in \mathbb{D}^+$.*

Como S es una función impar, la desigualdad se puede extender a $\mathbb{D}$. En efecto, si $x \in \mathbb{D}^-$, por el lema anterior $\pi x \leq S(-x) \leq -\pi x$, por lo tanto

$$\pi x \leq -S(-x) = S(x) \leq -\pi x.$$

Sea ha demostrado el teorema siguiente.

Teorema 8 *Para $x \in \mathbb{D}$, se tiene que $|S(x)| \leq \pi |x|$.*

A continuación se presentan unas igualdades y desigualdades importantes para nuestros propósitos.

Teorema 9 *Para* $x, y \in \mathbb{D}$ *se tiene*

$$S(x) - S(y) = 2C\left(\frac{x+y}{2}\right) S\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$C(x) - C(y) = 2S\left(\frac{x+y}{2}\right) S\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Prueba

Note que $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$, $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$, al realizar esta sustitución en $S(x) - S(y)$ y aplicar el teorema 5 se obtiene el resultado para la función S. El procedimiento es similar para la función C.

Teorema 10 *Para* $x, y \in \mathbb{D}$ *se tiene*

$$|S(x) - S(y)| \leq \pi |x-y|, \quad |C(x) - C(y)| \leq \pi |x-y|.$$

Prueba

Por los dos teoremas anteriores se tiene

$$|S(x) - S(y)| = 2\left|C\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \left|S\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|S\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq \pi |x-y|.$$

Para C se procede de manera similar. □

En secciones anteiores se demostró que $\left(\frac{2^n s_n}{c_n}\right) = \left(\frac{Q_n}{2}\right)$ es una sucesión decreciente que converge a π, por lo tanto

$$\frac{S(x)}{C(x)} \geq \pi x, \quad \text{para } x = \frac{1}{2^n}. \tag{11}$$

Ahora se procederá a extender esta desigualdad a $\mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right[$. La siguiente definición nos ayudará a simplificar la notación. Se define la función

$$T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}, \quad \text{para } x \in \ \operatorname{Dom}(T) = \mathbb{D} - \left\{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Note que

$$T(x+y)=\frac{S(x)C(y)+C(x)S(y)}{C(x)C(y)-S(x)S(y)},$$

dividiendo numerador y denominador en la desigualdad anterior entre $C(x)C(y)$, se obtiene el siguiente lema:

Lema 6 *Si* $x,y,x+y\in$ *Dom* (T)*, se tiene*

$$T(x+y)=\frac{T(x)+T(y)}{1-T(x)T(y)}.$$

Además, como S es estrictamente creciente y C estrictamente decreciente en $\mathbb{D}\cap\left[0,\frac{1}{2}\right[$, se sigue que T es estrictamente creciente en dicho conjunto. En efecto, si $0\leq x<y<\frac{1}{2}$, se tiene

$$0\leq T(x)=\frac{S(x)}{C(x)}<\frac{S(y)}{C(y)}.$$

En particular, para $x\in\mathbb{D}\cap\left[0,\frac{1}{4}\right[$ se tiene $0\leq T(x)<T\left(\frac{1}{4}\right)=1$, y por lo tanto

$$0<1-T(x)T(y)\leq 1,\text{ para } x,y\in\mathbb{D}\cap\left[0,\tfrac{1}{4}\right[. \tag{12}$$

Por lo tanto se concluye para $x,y\in\mathbb{D}\cap\left[0,\frac{1}{4}\right[$:

$$T(x+y)=\frac{T(x)+T(y)}{1-T(x)T(y)}\geq T(x)+T(y).$$

Con este resultado se probará el siguiente lema.

Lema 7 *La función* T *satisface* $|T(x)|\geq\pi|x|$*, para cada* $x\in\mathbb{D}\cap\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$.

Prueba

Si $0\leq x=\dfrac{k}{2^n}<\dfrac{1}{4}$, se procede por inducción sobre k. En el paso induccitivo se tiene que para $\frac{k+1}{2^n}\leq\dfrac{1}{4}$, utilizando la desigualdad anterior, la hipótesis inductiva y (11), se obtiene

$$T\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \geq T\left(\frac{k}{2^n}\right) + T\left(\frac{1}{2^n}\right) \geqslant \frac{k\pi}{2^n} + \frac{\pi}{2^n} = \frac{(k+1)\pi}{2^n}.$$

Si $x \in \mathbb{D} \cap \left[\frac{-1}{4}, 0\right]$, entonces por el lema anterior $-T(x) = T(-x) \geq -\pi x$, de donde se obtiene que $T(x) \leq \pi x \leq 0$, y de ahí el resultado. □

El paso a $\mathbb{R}$

Comenzamos restringiéndonos al intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Como hemos demostrado, en el conjunto $\mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ la función S es estrictamente creciente. Considere $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ y consideremos las sucesiones (ρ_n) y (σ_n) dadas por el teorema 1. La primera de estas es creciente y la segunda decreciente, y ambas convergen a x. En particular se tiene

$$\rho_n \leq \rho_{n+1} \leq x \leq \sigma_{n+1} \leq \sigma_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $0 < x < \frac{1}{2}$, y ambas sucesiones convergen a x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \rho_n < \sigma_n < \frac{1}{2}$, para $n > n_0$.

Como la función S es estrictamente creciente en $\mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$, se sigue que

$$0 = S(0) < S(\rho_n) \leq S(\rho_{n+1}) \leq S(\sigma_{n+1}) \leq S(\sigma_n) < S\left(\frac{1}{2}\right). \tag{13}$$

Lo anterior demuestra que la sucesión $(S(\rho_n))$ es creciente y $(S(\sigma_n))$ es decreciente, y que ambas son acotadas. Por el teorema de Weierstrass se sigue que estas sucesiones son convergentes.

Ahora, dado que $\sigma_n = \rho_n + \frac{1}{2^n}$ se tiene:

$$|S(\sigma_n) - S(\rho_n)| \leq \frac{\pi}{2^n} \to 0.$$

Ahora, como $c_n \to 1$, se ha demostrado entonces que:

$$\lim_{n\to\infty} S(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S(\rho_n). \tag{14}$$

Se quiere definir $S(r)$,de manera que sea creciente en $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Para que esto ocurra debe tenerse:

$$S(\rho_n) \leq S(x) \leq S(\sigma_n),$$

y entonces la única definición posible para $S(x)$ es:

$$S(x) := \lim_{n\to\infty} S(\rho_n).$$

Con la función C se puede hacer un análisis similar, con la diferencia que ahora la sucesión $(C(\rho_n))$ resulta decreciente y $(C(\sigma_n))$ creciente. Alternativamente, dado que $C(r) = \sqrt{1-S^2(r)}$ para $r \in \mathbb{D} \cap \left[0,\frac{1}{2}\right]$, se puede definir

$$C(x) = \sqrt{1-S^2(x)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-S^2(\rho_n)} = \lim_{n\to\infty} C(\rho_n), \quad \forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right].$$

Continuidad secuencial

Las desigualdades obtenidadas enunciadas en el teorema 10, nos inducen a una única manera de definir las funciones S y C en $\mathbb{R}$. En efecto, primeramente si $x \in \mathbb{R}$, y (ω_n) es una sucesión en $\mathbb{D}$ convergente a x, entonces (ω_n) es una sucesión de Cauchy, es decir:

$$\alpha_n = \sup_{m \geqslant n} |\omega_n - \omega_m| \to 0.$$

Por la desigualdad dada en el teorema 10, se sigue que

$$\sup_{m \geqslant n} |S(\omega_n) - S(\omega_m)| \leq \pi \sup_{m \geqslant n} |\omega_n - \omega_m| \to 0,$$

así que la sucesión $(S(\omega_n))$ es de Cauchy, y por lo tanto convergente en $\mathbb{R}$.

Por otro lado, si (τ_n) es otra sucesión de diádicos que converge a x, entonces $(\tau_n - \omega_n)$ es una sucesión en $\mathbb{D}$ que converge a 0, y luego

$$|S(\tau_n) - S(\omega_n)| \leq \pi |\tau_n - \omega_n| \to 0.$$

Esto demuestra que

$$\lim_{n \to \infty} S(\tau_n) = \lim_{\infty} S(\omega_n).$$

Lo anterior demuestra que el valor del límite de la sucesión $S(\omega_n)$, es independiente de la sucesión de diádicos que se escoja, siempre que esta converja a x. Resumimos:

Teorema 11 *Existe un número real λ tal que, para toda sucesión (ω_n) de diádicos que converge a x, se tiene que la sucesión $(S(\omega_n))$ converge a λ.*

Por lo tanto tiene sentido definir

$$S(x) := \lim_{n \to \infty} S(\rho_n), \text{ para cualquier sucesión } (\rho_n) \quad \text{en } \mathbb{D} \text{ convergente a } x.$$

Para $C(x)$, se procede de manera similar, se obtiene que se debe definir

$$C(x) := \lim_{n \to \infty} C(\rho_n), \text{ para cualquier sucesión } (\rho_n) \quad \text{en } \mathbb{D} \text{ convergente a } x.$$

Nótese que la definición de S (y por ende la de C) es consistente con la definición que ya se tenía para $x \in \mathbb{D}$, puesto que en tal caso se puede tomar $\rho_n = x$ para todo n.

Nótese que la definición de S (y similarmente la de C) es la única posible, si se quiere que esta función sea continua en $\mathbb{R}$. En la siguiente sección, se demuestra que también es la única posible, si se quiere que S sea creciente en $\left[0, \frac{1}{2}\right[$.

Identidades de S y C en $\mathbb{R}$

Finalmente, se demostrarán las propiedades de las funciones C y S en $\mathbb{R}$

Teorema 12 *Para* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene:*

1. $C^2(x) + S^2(x) = 1$.

2. $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y), \quad S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$.

3. $C\left(\frac{1}{2} + x\right) = -S(x), \quad S\left(\frac{1}{2} + x\right) = C(x)$,

4. $C\left(\frac{1}{2} - x\right) = S(x), \quad S\left(\frac{1}{2} - x\right) = C(x)$.

5. $C(x+1) = -C(x), \quad S(x+1) = -S(x)$,

6. Las funciones C y S son periódicas de período 2.

7. $S(x) - S(y) = 2C\left(\dfrac{x+y}{2}\right) S\left(\dfrac{x-y}{2}\right), \quad C(x) - C(y) = 2S\left(\dfrac{x+y}{2}\right) S\left(\dfrac{y-x}{2}\right)$.

Prueba

1. Sea (α_n) una sucesión en $\mathbb{D}$ convergente a x, por definición $S(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S(\alpha_n)$ y $C(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} C(\alpha_n)$, por lo tanto

$$C^2(x) + S^2(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[S^2(\alpha_n) + C^2(\alpha_n)\right] = 1.$$

2. Considere dos sucesiones (α_n) y (β_n) en $\mathbb{D}$, que convergen a x y y respectivamente, entonces $(\alpha_n + \beta_n)$ converge a $x + y$, y por definición se tiene que

$$C(x+y) = \lim_{n \to \infty} C(\alpha_n + \beta_n).$$

Además, como $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{D}$ se tiene

$$C(\alpha_n + \beta_n) = C(\alpha_n)C(\beta_n) - S(\alpha_n)S(\beta_n),$$

y entonces

$$C(x+y) = \lim_{n \to \infty} \left[C(\alpha_n)C(\beta_n) - S(\alpha_n)S(\beta_n)\right] = C(x)C(y) - S(x)S(y).$$

Similarmente se procede para $S(x+y)$.

Las demás propiedades son consecuencia de la propiedad 2, y de que la nueva definición de S y C es consistente con la anterior. $\square$

Desigualdades importantes de S y C en $\mathbb{R}$

El siguiente teorema tiene por objetivo extender las desigualdades obtenidas en $\mathbb{D}$ a $\mathbb{R}$.

Teorema 13 *Para* $x, y \in \mathbb{R}$ *se cumple:*

1. $|S(x)| \leq \pi |x|$
2. $|S(x) - S(y)| \leq \pi |x-y|, \quad |C(x) - C(y)| \leq \pi |x-y|$.
3. $\left|\frac{S(x)}{x}\right| \geq \pi |C(x)|$, si $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] - \{0\}$

Prueba

1. Sea (α_n) una sucesión en $\mathbb{D}$ convergente a x, por definición $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S(\alpha_n)$, además como $\alpha_n \in \mathbb{D}$ se tiene

$$|S(\alpha_n)| \leq \pi |\alpha_n|.$$

   Por las propiedades de los límites de sucesiones se obtiene

$$|S(x)| = \lim_{n\to\infty} |S(\alpha_n)| \leq \pi \lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = \pi |x|.$$

2. Por el teorema 12 se tiene

$$|S(x) - S(y)| = 2\left|C\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\left|S\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|S\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|,$$

   y aplicando la parte 1 de este teorema se obtiene el resultado buscado. Para C se procede de manera similar.

3. Sea (α_n) una sucesión en $\mathbb{D} \cap \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, que converge a x. Por el lema 7 se tiene

$$|T(\alpha_n)| \geq \pi |\alpha_n|, \text{ esto es } \left|\frac{S(\alpha_n)}{\alpha_n}\right| \geq \pi |C(\alpha_n)|.$$

Al tomar el límite se concluye que

$$\left|\frac{S(x)}{x}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{S(\alpha_n)}{\alpha_n}\right| \geq \pi \lim_{n\to\infty}|C(\alpha_n)| = \pi |C(x)|. \quad \square$$

Continuidad de S y C en $\mathbb{R}$

Utilizando las desigualdades e igualdades de la sección anterior se obtienen los siguientes límites.

Teorema 14 *Las funciones S y C cumplen:*

$$\lim_{x\to 0} S(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} C(x) = 1, \quad \lim_{s\to 0}\frac{S(x)}{x} = \pi.$$

Prueba

1. Por el teorema anterior se tiene que

$$-\pi |x| \leq S(x) \leq \pi |x|,$$

   y al aplicar el teorema del encaje se obtiene el resultado.

2. Del teorema anterior, se sigue que

$$|C(x) - 1| = |C(x) - C(0)| \leq \pi |x|,$$

   y nuevamente por el teorema del encaje se obtiene que $\lim_{x\to 0}|C(x) - 1| = 0$.

3. Del teorema anterior se sabe que

$$\pi \geqslant \frac{S(x)}{x} \geq \pi C(x),$$

para $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$. Como las funciones involucradas en esta desigualdad son pares, esta es válida también para $x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right[$. Por el teorema del encaje se obtiene el resultado. $\square$

Como $|S(x) - S(a)| \leq \pi |x - a|$, para todo $a, x \in \mathbb{R}$, entonces por el teorema del encaje se obtiene que

$$\lim_{x \longrightarrow a} |S(x) - S(a)| = 0,$$

es decir

$$\lim_{x \longrightarrow a} S(x) = S(a).$$

De manera similar se obtiene

$$\lim_{x \longrightarrow a} C(x) = C(a).$$

Lo anterior demuestra el siguiente teorema:

Teorema 15 *Las funciones S y C son continuas en todo $\mathbb{R}$.*

Intervalos de Monotonía de S y C en $\mathbb{R}$

Considere primero el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Si $0 \leq x < y \leq \frac{1}{2}$, tomemos sucesiones de diádicos (α_n) y (β_n), la primera decreciente a x, la segunda creciente a y. Sea $\rho = \frac{x+y}{2}$. Como $\alpha_n \rightarrow x$, existe n_0 tal que $\alpha_n < \rho$ para cada $n \geqslant n_0$. De la misma manera, como $\beta_n \rightarrow y$, existe n_1 tal que $\beta_n > \rho$ para cada $n \geqslant n_1$. Luego, si $m = \max(n_0, n_1)$ se tiene

$$S(x) \leq S(\alpha_m) < S(\beta_m) \leq S(y),$$

es decir $S(x) < S(y)$. Lo mismo se puede hacer en cualquier intervalo I tal que S sea estrictamente monótona en $I \cap \mathbb{D}$. Para la función C se procede de manera similar. El siguiente teorema resume los resultados de esta sección.

Teorema 16 *Para cada entero n se tiene:*

1. S es estrictamente creciente en $\left[2n - \frac{1}{2}, 2n + \frac{1}{2}\right]$, y estrictamente decreciente en $\left[2n + \frac{1}{2}, 2n + \frac{3}{2}\right]$.

2. C es estrictamente decreciente en $[2n, 2n+1]$, y estrictamente creciente en $[2n-1, 2n]$.

Intervalos de Concavidad de S y C en $\mathbb{R}$

A continuación se determinarán las derivadas de las funciones C y S. Para la función S se tiene que

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[S(x) \frac{C(h)-1}{h} + C(x) \frac{S(h)}{h} \right].$$

Por el teorema 14 se tiene que $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \frac{S(h)}{h} = \pi$ y $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \frac{C(h)-1}{h} = 0$, y entonces S es derivable, y

$$S'(x) = \pi C(x).$$

Similarmente se obtiene que

$$C'(x) = -\pi S(x).$$

Debido a que se conoce los intervalos de monotomía de S y C y sus derivadas estan relacionacionadas con ellas mismas, se pueden obtener los intervalos de concavidad de S y C. En efecto, por ejemplo en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la función S es estrictamente creciente y la función C es estrictamente decreciente, entonces S' y C' son ambas estrictamente decrecientes, y por lo tanto ambas gráficas de S y C son cóncavas hacia abajo en el intervalo $\left[2n, \frac{1}{2}+2n\right]$, por ser periódicas. El siguiente teorema resume los otros casos que el lector puede comprobar.

Teorema 17 *Para cada entero n se tiene:*

1. La gráfica de S es convexa (cóncava hacia arriba) en $[2n-1, 2n]$, y cóncava (hacia abajo) en $[2n, 2n+1]$.
2. La gráfica de C es convexa (cóncava hacia arriba) en $\left[2n+\frac{1}{2}, 2n+\frac{3}{2}\right]$, y cóncava (hacia abajo) en $\left[2n-\frac{1}{2}, 2n+\frac{1}{2}\right]$.

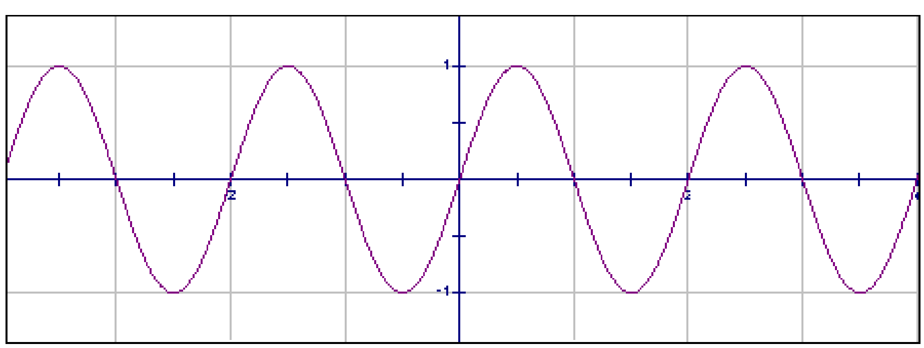
Gráficas de las funciones S y C en $\mathbb{R}$.

De la información obtenida en las secciones anteriores, se pueden trazar las gráficas de las funciones S y C. Invitamos al lector a realizar una análisis detallado de dicha información. Debido a la identidad

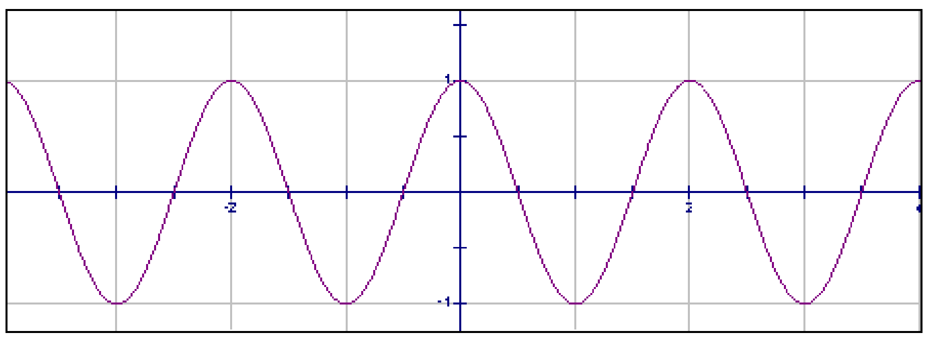
$$S\left(x+\tfrac{1}{2}\right)=C\left(x\right),$$

la gráfica de coseno se obtiene trasladando la de seno, media unidad a la izquierda. Por lo tanto, basta hacer el análisis para la función S.

Gráfica de la función $S\left(x\right)$



Gráfica de la función de $C\left(x\right)$



Las funciones Seno y Coseno

La función seno se define de la siguiente manera

$$\operatorname{sen}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad \operatorname{sen}x=S\left(\frac{x}{\pi}\right).$$

Se define la función coseno como

$$\cos:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad \cos x=C\left(\frac{x}{\pi}\right).$$

Ambas, funciones cumplen las siguientes propiedades

Teorema 18 *Para* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene:*

1. Identidad pitagórica: $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.
2. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$, $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y \cos x$.
3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = C(x)$,
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.
5. $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$,
6. Las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.
7. Ambas funciones son continuas, y además cumplen

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

8. Las funciones seno y coseno son derivables, y además

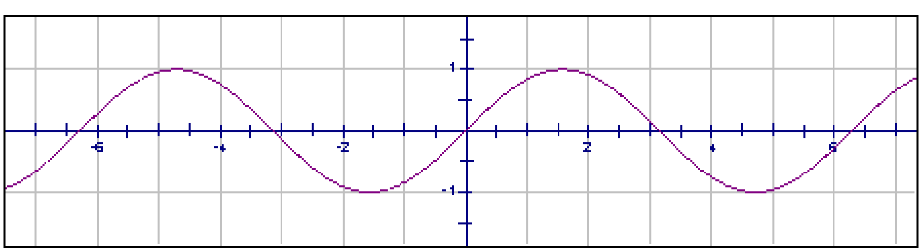
$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

Prueba

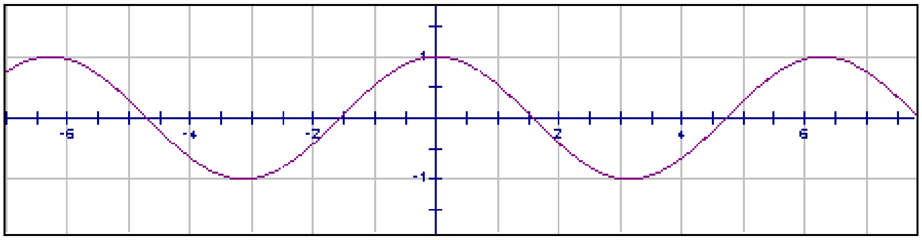
La prueba de estos puntos es una consecuencia directa de las propiedades de las funciones S y C, y queda como ejercicio para el lector.

Note que las gráficas de las funciones seno y coseno son dilataciones, en el eje x, de las de las funciones S y C respectivamente. A continuación se presentan las gráficas de estas funciones.

Gráfica de la función seno



Gráfica de la función coseno



Tomando como base el método de exhausión de Arquímedes y haciendo uso de elementos del análisis, se ha logrado construir las Funciones Trigonométricas seno y coseno, y a la vez se ha demostrado una serie de propiedades de estas funciones, concluyendo con su graficación. Esperamos que estas notas sean de utilidad para el lector, en cuanto al análisis y aplicación de la teoría de funciones trigonométricas.

Bibliografía

1

Artículo: *Sobre el área del círculo y longitud de la circunferencia*. Revista electrónica La Gacetilla Matemática, dirección: *http://www.arrakis.es/~ mcj/circulo.htm*. (1998).

2

Bartle, R.G. & D.R. Sherbert. *Introducción al Análisis Matemático de una Variable.* Limusa, 1996.

3

Bourbaki, N. *Éléments d´histoire des Mathématiques,* Paris, Hermann, 1969.

4

Cambronero, S. *Una construcción elemental de las Funciones Exponencial y Logarítmica*. Revista Virtual Matemática, Educación e Internet del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Vol 3, N °1, Abril 2002. Dirección: *http:// www.itcr.ac.cr/carreras/ matematica/ revistamate/ Contribucionesv3n1002/ funcionexponencial/index.html*

5

Courant, R. & F. John. *Introduction to Calculus and Analysis.* Vol. I. Springer-Verlag, N.Y. 1989.

6

Eves, H. *An Introduction to the History of Mathematics.* 3rd ed. NY 1961.

7

Protagonistas de la civilización: Arquímedes (Enciclopedia). Editorial Debate/Itaca.(1983).

8

Pedrick, G. *A first Course in Analysis.* Springer-Varlag, N.Y. 1994.

9

Pownall, M.W. *Real Analysis. A first course with foundations.* WCB Publishers, 1994.

10

Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill. 2da. edición. 1966.

11
Sprecher, D.A. *Elements of Real Analysis.* Dover Pub. Inc. New York, 1970.
