Una Manera Sencilla para Probar un Teorema de Geometría Analítica

Enrique Vílchez Quesada
Universidad Nacional de Costa Rica
Escuela de Matemática

Resumen

La razón de esta propuesta, está fundamentada en brindar una exposición simple de una prueba de un teorema de geometría analítica, utilizado por nuestros estudiantes en la educación media y la educación media superior. Mi idea nació de la iniciativa de postular una demostración a un nivel básico, de tal forma que cualquier estudiante que conozca algunos principios generales de álgebra de polinomios, geometría analítica y trigonometría, pueda comprenderla sin mayor complicación.

Introducción

Este trabajo expone una demostración que corrobora que dos rectas son pa-ralelas cuando sus pendientes son iguales y son perpendiculares cuando el producto de ellas es igual a menos uno. El aspecto más trascendental, no consiste en la prueba que se realiza, ya que mediante los elegantes medios brindados por el álgebra lineal, la demostración cobra vida de una forma bastante natural, bajo un estilo que marchitaría mis esperanzas de poderla superar. Mi principal intención por tanto, consiste en exponer un ejemplo de un teorema usual dentro de la enseñanza secundaria, demostrado con conocimientos enmarcados dentro de esa línea. Este trabajo representa un esfuerzo por recordar a los colegas, la gran importancia de incorporar métodos de enseñanza que no abandonen la formalidad característica de la matemática como disciplina. Pedagógicamente ha existido y existe en la actualidad, la tendencia de incorporar metodologías de caracter inductivo, que conducen al estudiante a tener una expectativa equivocada con respecto al significado de un verdadero razonamiento lógico matemático.

Desarrollo de la Propuesta

Teorema

Sean L_1 *y* L_2 *dos rectas cuyas ecuaciones asociadas vienen dadas repectivamente por:*

$$\begin{cases} y = m_1 x + b_1,\ m_1, b_1 \in IR \\ y = m_2 x + b_2,\ m_2, b_2 \in IR \end{cases}$$

entonces:

$a)\ L_1 \| L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

$b)\ L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

En la siguiente prueba, los ángulos utilizados deben ser entendidos como ángulos euclideanos y no ángulos en posición estandar.

Prueba

a) Debemos tomar en consideración dos casos, a saber:

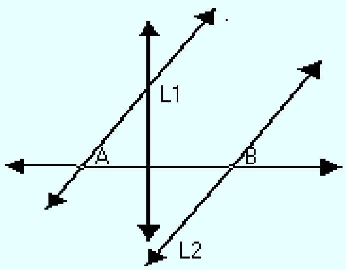

Figura a.1

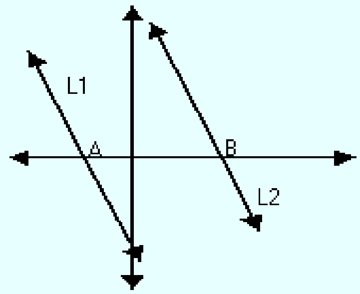

Figura a.2

<u>Caso $a.1$:</u>

$\Rightarrow$) Sean dos rectas $L_1 \wedge L_2$, $L_1 \| L_2$, dispuestas como se observa en la Figura a.1 entonces:

$$L_1 \| L_2 \Rightarrow A = B \text{ por ser ángulos correspondientes entre paralelas}$$
$$\Rightarrow \tan A = \tan B \Rightarrow m_1 = m_2 \text{ por definición de la pendiente de una recta}$$

$\Leftarrow$) Por hipótesis:

$$m_1 = m_2$$
$$\Rightarrow \tan A = \tan B \text{ por definición de la pendiente de una recta}$$
$$\Rightarrow \arctan(\tan A) = \arctan(\tan B)$$
$$\Rightarrow A = B \text{ pues estos ángulos son agudos}$$
$$\Rightarrow L_1 \| L_2 \text{ por un teorema de geometría Euclídea}$$

<u>Caso $a.2$:</u>

$\Rightarrow$) Sean dos rectas $L_1 \wedge L_2$, \$L dispuestas como se observa en la Figura a.2 entonces:

$$L_1 \| L_2 \Rightarrow A = B \text{ por ser ángulos correspondientes entre paralelas}$$
$$\Rightarrow \tan A = \tan B \Rightarrow m_1 = m_2 \text{ por definición de la pendiente de una recta}$$

$\Leftarrow$) Por hipótesis:

$$
\begin{aligned}
& m_1 = m_2 \\
& \Rightarrow \tan A = \tan B \text{ por definición de la pendiente de una recta} \\
& \Rightarrow -\tan(\pi - A) = -\tan(\pi - B) \text{ por una propiedad trigonométrica} \\
& \Rightarrow \arctan(\tan(\pi - A)) = \arctan(\tan(\pi - B)) \\
& \Rightarrow \pi - A = \pi - B \text{ pues estos ángulos son agudos} \\
& \Rightarrow A = B \\
& \Rightarrow L_1 \| L_2 \text{ por un teorema de geometría euclídea}
\end{aligned}
$$

b) Debemos tomar en consideración dos casos, a saber:

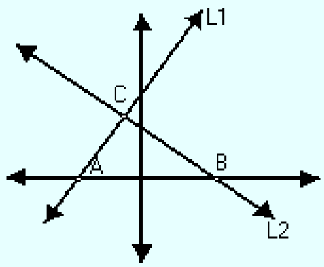

Figura b.1

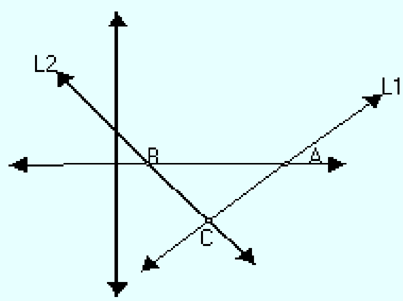

Figura b.2

<u>Caso $b.1$:</u>

$\Rightarrow$) $L_1 \perp L_2$:

$$
\begin{aligned}
& m_2 = \tan B \text{ por definición de la pendiente de una recta} \\
& \Rightarrow m_2 = \tan\left(A + \tfrac{\pi}{2}\right) \text{ pues } B \text{ es un ángulo externo del } \triangle ABC \\
& \Rightarrow m_2 = \tan\left(\pi - \left(\tfrac{\pi}{2} - A\right)\right) \\
& \Rightarrow m_2 = -\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - A\right) \text{ por una propiedad trigonométrica} \\
& \Rightarrow m_2 = -\cot(A) = -\tfrac{1}{\tan A} \\
& \Rightarrow m_2 = -\tfrac{1}{m_1} \text{ por definición de la pendiente de una recta} \\
& \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$) Por hipótesis, sabemos que:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Por otra parte, es claro que:
MATH

Dado que $0 < C < \pi$ pues es un ángulo interno del $\triangle ABC$. Probemos que:

$$\cos C = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\cos C = \cos(B - A) = \cos A \cos B + senAsenB \\
&\Rightarrow \cos C = \cos A \cos B(1 + \tan A \tan B) \\
&\Rightarrow \cos C = \cos A \cos B(1 + m_1 \cdot m_2) \\
&\Rightarrow \cos C = \cos A \cos B(1 + (-1)) \text{ por } (1) \\
&\Rightarrow \cos C = 0 \\
&\Rightarrow C = \tfrac{\pi}{2} \\
&\therefore\ L_1 \perp L_2
\end{aligned}
$$

Caso $b.2$

La prueba de este caso es idéntica a la realizada en b.1.

Conclusiones

La matemática es una disciplina con una tendencia netamente teórica, como docente considero que en muchas instituciones educativas de enseñanza media, los colegas utilizan métodos de aprendizaje que pierden este principio, conduciendo a los educandos a aprender fórmulas sin ningún sentido científico. Este trabajo busca exponer un ejemplo de una prueba semiformal, que podría ser adaptada para la enseñaza en los salones de clase en secundaria.

Bibliografía

1. Barrantes, H. (1993). Elementos de Álgebra Lineal. Editorial EUNED. Costa Rica.
2. Grossman, S. (1996).Álgebra Lineal. Editorial McGraw Hill. México.
3. Meneses, R. MA. Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática Quinto Año. Editorial Norma. Costa Rica.
4. Riddle, D. (1997).Geometría Analítica. Editorial Thomson. México.
5. Swokowski, E. (1988). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Editorial Iberoamericana. México.