El Papel de la Historia en la Integración de los Marcos Geométrico, Algebraico y Numérico en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Juan E. Nápoles Valdés
Universidad de la Cuenca del Plata
Carlos Negrón Segura
Instituto Superior Pedagógico de Holguín

Resumen

Usando la Historia de la Matemática como base para la Transposición Didáctica, se presenta una experiencia en la impartición de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en la cual se integran los tres escenarios de solución de las mismas y se modifica el esquema de enseñanza actual de dicha asignatura. Algunas recomendaciones se añaden al final del trabajo.

1. Preliminares.

Uno de los fundamentos de la actual reforma de la enseñanza de la Matemática, es el concepto del que se parte respecto a la naturaleza del conocimiento matemático. La perspectiva histórica permite mostrar, entre otras cosas, que la Matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua y que dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden, su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos. Otra consideración importante se deriva del uso, en el proceso histórico de construcción de los conocimientos matemáticos, del razonamiento empírico-deductivo en grado no menor que el razonamiento deductivo.

Parece difícil de negar el hecho que las diversas interpretaciones epistemológicas acerca del status científico de las Matemáticas tienen una influencia decisiva en la consideración de su Historia y su Enseñanza. Por poner sólo un ejemplo bastante reciente, qué duda cabe que la consideración bourbakista de dicha ciencia, sintetizada en el artículo firmado por el colectivo autodenominado Nicolás Bourbaki sobre la "Estructura de la Matemática" (ver **Bourbaki (1962)**), ha determinado su visión de la Historia de la misma, así como su concepción de qué y cómo enseñarla, puesta de manifiesto en la década de los 60 bajo la denominación de la "matemática moderna" o la "nueva matemática". El slogan que acuñó Jean Dieudonné, quizás el bourbakista más osado a la hora de asumir y defender sus peculiares posicionamientos pedagógicos, amparándose incluso en los planteamientos cognitivos de Jean Piaget, con motivo del coloquio de Royaumont realizado en 1959, pone de manifiesto esta interrelación entre las Matemáticas, su Historia y su Enseñanza. Su *¡Abajo Euclides!,* está plenamente justificado en función de sus planteamientos históricos, recogidos en **Dieudonné (1972).**

En esta dirección, cabe quizás añadir lo siguiente, como objetivos a trasmitir con la utilización de recursos históricos en la Educación Matemática:

1. Una concepción dinámica de la Matemática, acuñada en la célebre frase de Philip E. Jourdain, en la introducción a su

comentado **“La Naturaleza de la Matemática”,** cuando al declarar el objetivo central de dicho libro apuntaba: *“Espero que conseguiré mostrar que el proceso del descubrimiento matemático es algo vivo y en desarrollo”*.

2. Que se debe aceptar el significado de los objetos matemáticos en su triple significado: institucional, personal y temporal (ver **Díaz y Batanero (1994)**) y para algunas observaciones, ver **Nápoles (1997)**.

3. La distinción que debe establecerse entre una argumentación, una prueba y una demostración, y la necesaria dosificación de estas en el curriculum escolar, así como las discusiones en torno a las concepciones clásicas sobre esta última y el rigor de las mismas (**Arbelaez (1995)**).

Por otra parte es claro, pero no siempre comprendido, que el objeto matemático en consideración para la enseñanza o el aprendizaje es estructuralmente, pero no cualitativamente, el mismo que en Matemáticas de aquí que la mayoría de los matemáticos creen que la educación de la matemática sólo está afectada por problemas del tipo ¿Cómo trasmitir los hechos matemáticos importantes a los alumnos?. De hecho, nosotros adoptamos la noción de significado de los objetos matemáticos en un triple condicionamiento: institucional, personal y temporal (**Díaz y Batanero (1994)**), lo que nos lleva a considerar el enfoque socio-antropológico de cómo se produce y en qué consiste el conocimiento matemático, que se enmarca dentro de la línea más amplia de Etnomatemática (ver por ejemplo, **Oliveras (1996)** y **Gerdes (1991)**). Partiendo del hecho que no hay acuerdo universal sobre lo que constituye una “buena enseñanza de la Matemática”, aceptamos que lo que cada cual considera como formas deseables de aprendizaje y enseñanza de la Matemática está influenciado por sus concepciones sobre la Matemática. Es poco probable que los desacuerdos sobre lo que constituye una buena enseñanza de la Matemática, puedan ser resueltos sin dirigirse a importantes asuntos sobre la naturaleza de la Matemática. Por otra parte, existen modelos didácticos dirigidos a qué cambios debe ‘sufrir’ el conocimiento matemático para ser adaptado como objeto de enseñanza, uno de tales modelos es el de “Transposición Didáctica” de **Chevallard (1985),** ver el Anexo 1 para una representación esquemática de la realizada en nuestro trabajo (hemos indicado con puntos suspensivos, la existencia de otros factores que puede tener en cuenta otro profesor), que se manifiesta como ya dijimos, en la diferencia existente entre el funcionamiento académico de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo.

Una línea de investigación que no ha sido completamente desarrollada, es la búsqueda de elementos históricos como recurso pedagógico, que aproveche nuestros conocimientos acerca de obstáculos didácticos, epistemológicos, ontogénicos y de problemas relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje, entre los que está la influencia de las creencias y concepciones de los profesores en su labor docente (**Thompson (1984 y1992)**, **Ernest (1989, 1992, 1994a y 1994b)**, **Flores (1993** y **1995)** entre otros).

Históricamente, el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO por comodidad) se ha desarrollado en tres grandes escenarios: el algebraico, el numérico y el geométrico. Desde la perspectiva de la enseñanza, los programas de estudio y los libros de texto nos muestran, por diversas razones, un predominio del escenario algebraico (con sus variantes), con algunos atisbos de los acercamientos numérico y geométrico. Esto ha traído como consecuencia, que se tenga una visión muy parcial de los métodos que existen para resolver EDO, pues frecuentemente en el estudio de los modelos determinísticos (v.gr. electrónica, óptica, etc.) se requiere establecer “articulaciones” entre los diferentes acercamientos.

Usando la Historia de la Matemática como base para la Transposición Didáctica se presenta, en este trabajo, una experiencia en la impartición de las EDO, en la Licenciatura en Educación, especialidad Física-Electrónica de la Universidad Pedagógica de Holguín, en la cual se integran los tres escenarios de solución de las mismas y se modifica el esquema de enseñanza actual de dicha asignatura. Esta experiencia sirvió de base para la tesis del Programa de Maestría "Didáctica de la Matemática", defendida por el segundo autor, bajo la dirección del primero.

Una vía para modificar este esquema de enseñanza, es el ***juego de marcos*** introducidos por **Douady (1986)**. Un marco, como ella nos dice, se entiende en el sentido usual que tiene cuando hablamos del marco algebraico, del marco aritmético, del marco geométrico; en el “juego de marcos” el docente propone al estudiante cambios entre los distintos tipos de marcos respecto a los problemas escogidos a conveniencia, con el fin de que ellos avancen en las fases del problema y que sus conocimientos evolucionen. En el trabajo, estudiamos cómo se pueden incorporar estas ideas, en particular en la enseñanza de las EDO[1], donde los escenarios son ejemplos de los marcos, asimismo, propondremos problemas con el fin de ver cómo se puede generar el juego de marcos; donde en este “juego” la computadora personal (PC) va a desempeñar un papel central.

Douady introduce la noción de marco en su tesis doctoral en el siguiente sentido:

"*Digamos que un marco está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, por las relaciones entre los objetos, por sus formulaciones eventualmente diversas y por imágenes mentales asociadas a esos objetos y sus relaciones. Estas imágenes juegan un papel esencial en su funcionamiento como útiles, de los objetos del marco. Dos marcos pueden tener los mismos objetos mas diferir en las imágenes mentales y la problemática desarrollada... concebimos la noción de marco, como una noción dinámica. El cambio de marcos es un medio para obtener formulaciones diferentes de un problema que sin ser necesariamente equivalentes permiten un nuevo acercamiento a las dificultades encontradas y la puesta en escena de útiles y técnicas que no se impusieron en la primera formulación".*

Más adelante introduce el "juego de marcos", como el cambio de marcos propuesto por el docente para hacer avanzar las fases de investigación de un problema en una situación escolar. En el desarrollo de este juego se distinguen tres fases:

1. Transferencia e interpretación.
2. Correspondencias imperfectas.
3. Mejoramiento de la correspondencia y progreso del conocimiento.

En nuestro caso, los distintos escenarios de solución de las EDO, son ejemplos de los marcos, así hablaremos de los marcos algebraico, numérico y geométrico en el mismo sentido que los escenarios algebraico, numérico y geométrico. El juego de marcos es proponer a los alumnos resolver una cierta EDO en un cierto marco y traducirlo (todo o parte de éste) a otro (transferencia e interpretación). La correspondencia entre los marcos en general es imperfecta, ya sea por causa matemática o por conocimientos insuficientes de los estudiantes. Esta situación es fuente de desequilibrio, a su vez la comunicación entre los marcos y, en particular, la comunicación con un marco auxiliar de representación es un factor de reequilibración. Esto conduce al mejoramiento de las correspondencias y al progreso del conocimiento (ver **Douady (1986)**).
Para fijar ideas, consideremos el problema de resolver una simple EDO:

$y' = -\frac{x}{y}$, o bien $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. (1)

Este mismo problema se puede plantear como la solución de un sistema (donde se introduce una tercera variable, el tiempo t) o bien de una EDO de segundo orden con coeficientes constantes, es decir, poniendo x = x(t), y = y(t) obtenemos:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -x \quad , \quad \frac{dx}{dt} = y \quad ,$$

es decir, el sistema:

$$x' = y,$$
$$y' = -x. \quad (2)$$

Al derivar la segunda ecuación del sistema obtenemos $y'' = -x' = -y$, lo que conduce a la ecuación diferencial de segundo orden:

$y'' + y = 0$, donde y = y(t). (3)

La ecuación (3) es interesante, ya que representa la ecuación de un sistema masa-resorte (donde la masa y la constante

del resorte son iguales a 1) sin amortiguamiento, que conduce a “oscilaciones libres” (ver fig. 1).
En virtud de la equivalencia de las tres ecuaciones, establecer la ecuación del movimiento para este caso, es equivalente a resolver la ecuación (1), la cual es de variables separables y conduce a una solución de la forma $x^2 + y^2=c$, esta ecuación representa una familia de circunferencias con centro en el origen y radio $\sqrt{c}$, lo que nos lleva a conjeturar que $x(t) = \sqrt{c}\cos t$, $y(t) = \sqrt{c}\,\mathrm{sen}\,t$. De lo anterior podemos observar que “inducir la solución” requiere, en principio, de la articulación de las diferentes representaciones (v.gr., algebraicas y gráficas), amén de conocer un método de solución.

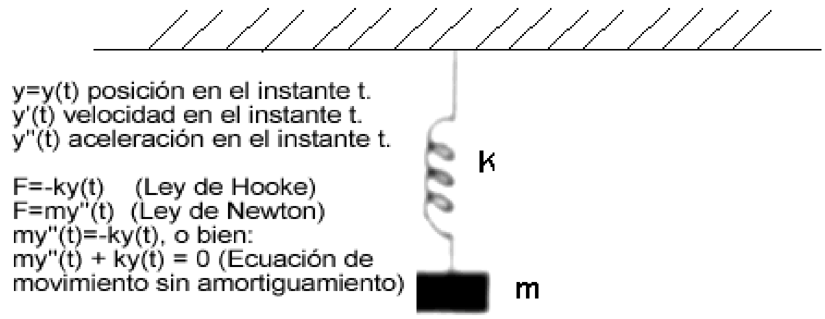


FIG. 1

En este caso, la solución del problema seguiría en general el siguiente esquema:

Modelo ® EDO ® Marco (algebraico, numérico, geométrico) ® Representación (gráfica, numérica, geométrica) ® Solución ® Modelo.

En este camino, algunas etapas de las rutas tienen dos o más subrutas, como se muestra en el Anexo 2.

Desde luego, como nos muestra la historia, existen algunos problemas donde la ruta seguida es única, es decir se tiene una única representación para la EDO, también se tiene un único acercamiento para encontrar la solución y en ocasiones la representación de la solución no se puede articular con otras representaciones con el fin de que nos suministren un conocimiento más amplio de la solución y en general del modelo estudiado.

En particular, en el problema anterior, la ruta seguida es la mostrada en la siguiente figura.

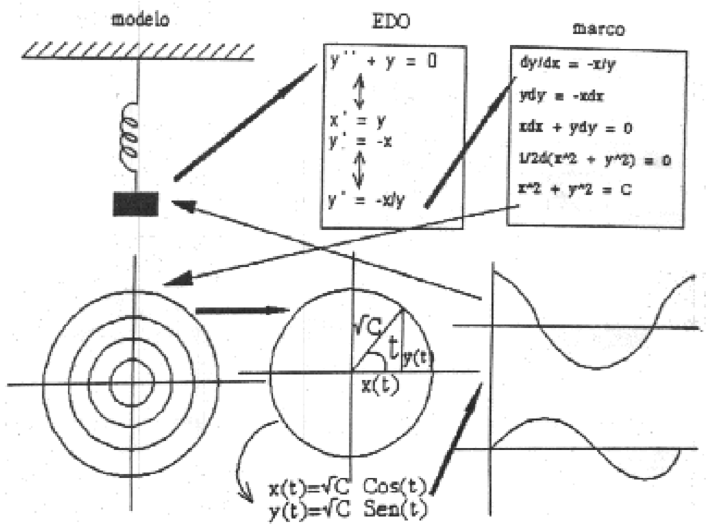


FIG. 2

Lo primero que podemos observar es que la ruta seguida no es única y que la búsqueda de la solución pone en juego una gran cantidad de representaciones (algebraicas, gráficas, etc.), que es necesario articular, con el fin de tener una mejor comprensión del modelo.

En el caso de la figura se partió de la EDO de primer orden $y' = -\frac{x}{y}$, desde luego que se hubiesen podido seleccionar cualquiera
de las otras dos representaciones. Después, elegimos el marco algebraico en su primera variante, es claro, que se podrían tomar las otras dos alternativas, v.gr., emplear las series de potencia o bien las transformadas de Laplace. También se pudo elegir el marco geométrico (o el numérico) y hacer un análisis cualitativo de las soluciones. El marco conduce a una representación (algebraica) para la solución la cual es necesaria articular con otras representaciones, para finalmente, llegar al modelo. En este sentido la noción de marco es dinámica (**Douady (1986)**). En la figura del Anexo 3 se muestran otras alternativas para la ruta.

2. Tópico desarrollado.
El ejemplo más abajo brindado, se relaciona de manera natural con las teorías del aprendizaje que estipulan: *"la inteligencia se construye en la medida donde la experiencia nueva no viene simplemente a añadirse al conocimiento anterior sino provoca una reorganización, una reestructuración del conocimiento en una totalidad coherente. El progreso está, por tanto, ligado a la presencia de un conflicto (una contradicción) entre el objeto y los esquemas utilizados para aprenderlo"* (**Hitt (1978)**). El percatarse de la existencia de un conflicto (o una contradicción) ya por sí solo es un elemento de progreso, aún y cuando no pueda resolverse.
Hemos apuntado, que la contradicción en Matemática es muy importante dentro del desarrollo de esta y la sensibilidad a las contradicciones matemáticas no era una característica principal de la mayoría de los matemáticos anteriores a este siglo (**Hitt (1994)** y **Phili (s/f)**). El desarrollo de esta sensibilidad tiene una relación estrecha con los modelos heurísticos antes señalados y, por supuesto, con el desarrollo de la Matemática en este siglo.

La articulación de los marcos numérico, algebraico y gráfico en la Matemática. El caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Este tema como ningún otro quizás se preste para la unión de los enfoques antes citados.

Si partimos de definir cada uno de sus entornos, tendremos que los programas actuales constan, casi exclusivamente, del enfoque algorítmico-algebraico. Los componentes geométricos (de la teoría cualitativa) y numéricos están prácticamente desaparecidos, si contamos con un equipamiento aceptable, es lógico que se impone la pregunta ¿cómo remediar esta situación?.

Desde el punto de vista histórico, el primer entorno donde se desarrolló la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias es el algebraico, multitud de intentos brindaron los métodos conocidos hoy, muchos de los cuales tienen unos cuantos años (**Hernández (1994)**). Si a esto sumamos que en el año 1992 se cumplieron 100 años de la Teoría Cualitativa, vinculada su nacimiento con las obras **"Los Nuevos Métodos de la Mecánica Analítica"** (Poincaré) y **"Problema General de la Teoría de la Estabilidad del Movimiento"** (Liapunov), tendremos bien a las claras que un estudio cualitativo es siempre útil, máxime cuando el modelo analizado puede ser no lineal, en cuyo caso es imprescindible prácticamente. Por otra parte, el desarrollo de los modernos ordenadores, ha hecho posible la implementación de métodos numéricos con una rapidez de convergencia sumamente elevada, de ahí la posibilidad de la utilización de los mismos.

Todo trabajo de teorización o de ingeniería didáctica de las matemáticas presupone y utiliza, necesariamente, un modelo más o menos elaborado (aunque a menudo implícito) de la actividad matemática y asimismo, una noción de lo que es «enseñar y aprender matemáticas». La explicitación de estos modelos permite que sean cuestionados, contrastados empíricamente y reelaborados, por lo que debería constituir un punto de referencia en toda investigación de didáctica de la Matemáticas (**Bosch y Gascon (1994)**).

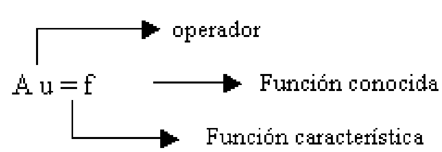
En nuestra experiencia, seguimos la metodología dada por Douady en su trabajo **"La ingeniería didáctica, un instrumento privilegiado para tomar en cuenta en la complejidad de la clase"**, la cual se compone de tres ejes estudios:

a) Análisis a priori.
b) Concepción de una enseñanza, es decir, la ingeniería didáctica propiamente dicha.
c) Análisis de los productos de la experiencia.

En el caso de nuestra experiencia, la parte a) corresponde fundamentalmente al análisis de los distintos aspectos que hemos creído necesario tomar en cuenta: la historia de las EDO, la evolución de los libros de textos, el impacto de las nuevas tecnologías, las creencias y concepciones de los profesores sobre la Matemática, etc.

Una primera actitud es precisamente la de mencionar que las EDO nos sirven, fundamentalmente, para modelar problemas cuya esencia es objeto de estudio por una rama de la ingeniería o de las ciencias: física, química, economía, etc. La primera dificultad que se nos presenta, es que no se puede considerar el fenómeno en estudio exactamente como se presenta en la Naturaleza, debido a la gran cantidad de aspectos que habría que tener en cuenta y a la consecuente necesidad de conocimientos matemáticos demasiados complejos, lo cual trae como consecuencia la idealización del problema en el cual no se consideran aquellos aspectos del fenómeno que no tienen gran influencia en el objeto de estudio, aquí es importante la presencia de especialistas de la rama. Por ejemplo, si se quiere describir el movimiento de un péndulo, es posible que el peso de la cuerda sea insignificante en el proceso.
Para la modelación y solución es importante tener en cuenta el siguiente proceder:

1. Determinar las funciones que relacionan las magnitudes esenciales que caracterizan el proceso.
2. Utilizar las leyes de la ciencia a la cual corresponde el problema en estudio, para describir el proceso mediante ecuaciones. Por lo general se puede representar en la forma:



3. Determinar las condiciones adicionales que caracterizan completamente el proceso. Entre estas condiciones, son frecuentes las llamadas condiciones iniciales que caracterizan el inicio del proceso y las llamadas condiciones de contorno, que caracterizan el comportamiento del fenómeno objeto de estudio, durante el proceso en la frontera de la región en la cual ocurre.

Antes de pasar a la búsqueda de su solución, debemos comprobar algunos aspectos que impone el problema real:

4. Estudio de la existencia y unicidad de la solución.
   Por ejemplo, si estudiamos, el lanzamiento de un proyectil por un arma de artillería a partir de su velocidad inicial y

del conocimiento de la resistencia del aire y pretendemos determinar la trayectoria del proyectil y la posición de este en cualquier tiempo, obligatoriamente el sistema de ecuaciones diferenciales que forma parte del modelo matemático correspondiente debe tener solución; porque realmente al lanzar el proyectil y transcurrir cierto tiempo después de lanzado, este debe ocupar una posición en el espacio.

Si contrariamente a lo que nos indica la práctica, el modelo matemático no tiene solución, es porque se ha cometido un error en su formulación.

Los procesos físicos, químicos, etc., que se modelan por ecuaciones diferenciales siempre tienen solución única.

5. Continuidad de la solución con respecto a las condiciones adicionales.

   Las condiciones adicionales que caracterizan completamente un proceso de la Naturaleza, se determinan, en general, por vía experimental y por ello no siempre son exactas.

   Es importante señalar que el estudio de la existencia, la unicidad y la dependencia continua de la solución de las condiciones adicionales, no solo es parte importante de la modelación del problema; en algunos problemas reales, puede ser de hecho parte esencial o total de la solución.
6. Determinación de la solución.

   En la teoría de ecuaciones diferenciales pueden distinguirse tres tipos de métodos; los llamados métodos analíticos, con los cuales se determina la solución de las ecuaciones diferenciales de forma exacta, o al menos en cuadraturas; los métodos numéricos, con los cuales la solución se determina aproximadamente; y los métodos cualitativos, con los cuales se investigan las propiedades deseadas de la solución, en muchos casos, sin necesidad de obtenerlas.

   En este punto es donde radica el peso fundamental de nuestra propuesta.
7. Determinación de una cota para el error.

   La solución aproximada se busca, generalmente, mediante un proceso iterativo y en ese caso es importante obtener, al menos, una valoración del error en función del número de iteraciones.
8. Análisis de la estabilidad de la solución.

Una segunda actitud, nos conduce a no abandonar el marco algebraico, sino por el contrario, complementarlo con los otros acercamientos para así tener una mayor riqueza (de conexiones) entre las representaciones y así poseer más herramientas al abordar el estudio de los modelos que están descritos mediante ecuaciones diferenciales, los cuales mayormente en el nivel al cual fue dirigida nuestra propuesta, conducen a ecuaciones de variables separables y lineales (de primer y segundo orden).

A partir de estas premisas, nos centramos más en los métodos para resolver ecuaciones lineales de primer y segundo orden; así dentro del marco algebraico, básicamente estudiamos los procedimientos para resolver ecuaciones lineales de primer y segundo orden, tomando como estrategia, partir de ecuaciones de variables separables, continuar con exactas y lineales, para desarrollar estas actividades se utilizó un sistema de tareas (**Garcés (1997)**), lo cual a nuestro juicio tiene muchas ventajas y completó nuestra propuesta en el uso del software computacional dentro de este marco, fundamentalmente el de ayudar al cálculo de integrales, a la simplificación de expresiones algebraicas y tener estrategias (cuando esto sea posible) para articular la solución (algebraica) con su representación gráfica, para lo cual es factible el uso de los procesadores simbólicos como Derive, Mathematica y otros.

Una tercera actitud que se asumió, fue la implementación del marco geométrico desde el inicio, desarrollando actividades que permitan trazar el conjunto de curvas compatibles con el campo de pendientes, como sabemos, esto siempre es posible en el caso de ecuaciones de primer orden y en algunas de segundo orden susceptibles de ser reducidas a ecuaciones de primer orden (v.gr., la lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes). En cuanto a la puesta en práctica de este acercamiento, se presentan dificultades con el trazado del campo de pendientes, cuestión que puede simplificarse con la ayuda del software computacional y lo más delicado es el tratamiento gráfico que se da en los cursos tradicionales al concepto de función (recordemos que en este acercamiento, básicamente lo que tenemos que hacer es graficar funciones que vienen descritas en términos de su derivada). En esta dirección nos podemos auxiliar, al inicio, con una serie de ejercicios que permitan manejar gráficas sin el apoyo de su expresión analítica, en este aspecto son útiles los trabajos realizados por **Hitt (1992, 1995)** y **Garcés (1997).**

El software computacional lo usamos en forma interactiva, proporcionando campos de pendientes trazados con la ayuda de la microcomputadora, con el fin de que los estudiantes bosquejen sobre éste, el conjunto compatible de curvas de solución.

El acercamiento numérico que no forma parte del programa de estudio actual, cuando se expone en los libros de textos actuales, se hace de una forma muy descriptiva, o en algunos casos desarrollando programas en algún lenguaje de programación. Como sabemos, esto se puede implementar de una forma efectiva mediante el uso de la hoja electrónica Excel. Dentro de nuestra experiencia, tal marco de resolución se adoptó desde un inicio como preludio del marco geométrico, ya que nos permite por un lado, pasar de la construcción (por medio de las quebradas de Euler) de una solución particular a la solución general y por otro, articular la representación tabular con la gráfica.

Por último, el marco numérico (los algoritmos clásicos como el de Euler, Euler mejorado y el de Runge-Kutta) considerarlos en la enseñanza de las EDO desde un inicio o bien al final.

Por otra parte, el desarrollo de las modernas computadoras ha hecho posible la implementación de métodos numéricos con una rapidez de convergencia sumamente elevada, de ahí la posibilidad de la utilización de los mismos.
Pudiéramos citar otro ejemplo que ilustra lo anterior, el caso de la ecuación diferencial $x' = x^2 - 1$, que brinda insospechadas posibilidades al maestro. Si analizamos el marco algebraico, su solución es muy elemental, pues es una ecuación en variables separables y resoluble en cuadratura, cuya solución se puede expresar por $x = \frac{1+ce^{2t}}{1-ce^{2t}}$, es claro que, esta expresión, a los estudiantes no les dice mucho sobre el comportamiento gráfico de las soluciones.

Sin embargo, analizando el marco geométrico y siguiendo el esquema de Brodetsky (ver **Brodetsky (1919)**) tendremos:

1. Los lugares geométricos donde f(t,x)=0, son las rectas x =1 y x = -1.
2. El lugar geométrico donde $\frac{1}{f(t,x)} = 0$, no existe.

Estos lugares dividen al plano en compartimentos donde x' › 0 (en el ejemplo x › 1 o x ‹ -1) y x' ‹ 0 (-1 ‹ x ‹ 1).

3. Al calcular x'' obtenemos x'' = 2xx' y analizando la ecuación x''=0, resultan los lugares geométricos x =0, x =1, x = -1. Estos lugares determinan regiones en el plano, donde las curvas son cóncavas hacia arriba (x › 1, -1 ‹ x ‹ 0) y cóncavas hacia abajo (x ‹ -1, 0 ‹ x ‹ 1).
4. Para completar el análisis trazamos un número de segmentos de tangentes en una cantidad conveniente de puntos, para trazar las curvas integrales compatibles con dicho campo (Anexo 4).

Todo lo anterior nos lleva a la siguiente proposición en cuanto a los contenidos a tratar:
- Introducción: ¿Qué es una ecuación diferencial?, marcos de solución.
- El marco geométrico (estudio cualitativo de la solución): Campos de direcciones, isoclinas, ...
- El marco algebraico: Separación de variables, ecuaciones exactas, ecuaciones diferenciales lineales, variación de constantes, coeficientes indeterminados, modelos y soluciones en series.
- El marco numérico: Método de Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta, análisis de errores.

El análisis a priori nos ha conducido a la propuesta descrita anteriormente, es decir, a la ingeniería didáctica propiamente dicha. Posteriormente, correspondió la elaboración de secuencias didácticas, la aplicación de las mismas, la observación y evaluación del conocimiento de los estudiantes.
Si tuviéramos que establecer otro orden "territorial" de cómo deben tratar los entornos, diríamos que:

- El enfoque algebraico, por su propia génesis y desarrollo, debe tratarse en un primer momento.
- El enfoque geométrico, puede ocupar un lugar intermedio dada las posibilidades de explotación que presenta. Basta como ejemplo la ecuación x" + senx = 0.
- El enfoque numérico, retomaría múltiples situaciones de los enfoques que le precedieron.

El tema tratado, nos lleva a adoptar el punto de vista del matemático práctico (**Hersh (1986), Lakatos (1986)** y **Putnam (1986)**) que desafía la suposición que el conocimiento matemático es *a priori* e *infalible*. Argumentan que el conocimiento matemático es, en realidad, falible y, en este sentido, es similar al conocimiento de las ciencias naturales. *"Nuestro dogma filosófico heredado y no examinado es que la verdad matemática debe poseer absoluta certeza. Nuestra experiencia actual en el trabajo matemático ofrece incertidumbre en abundancia"* (**Hersh (1986)**), similar posición es adoptada por **Kline (1985)**.

Una suposición que subyace en esta afirmación es que *saber* matemática es *hacer* matemática. Lo que caracteriza a la Matemática es su construcción, sus actividades creativas o procesos generativos. Esta visión de la Matemática *"en* *acción"* es consistente con la concepción de la enseñanza de la Matemática sostenida por eminentes matemáticos (**Halmos (1975), Polya (1963), Steen (1988), Thom (1973)**) y muchos en Educación Matemática; una concepción reflejada en documentos tales como **"The Cockcroft Report"** (Committe of Inquiry into the Teaching of Mathematics in School (1983)) y **"Every body counts"** (National Research Council (1989)). La concepción de la enseñanza de la Matemática que se recoge en estos documentos es aquella en la que los estudiantes se ocupan en actividades con un fin, que emergen de situaciones problémicas, que requieren razonamiento y pensamiento creativo, recolección y aplicación de información, descubrimiento, invención y comunicación de ideas y comprobación de esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación, sin negar, por supuesto, el valor y el lugar de los conceptos y procedimientos en el curriculum de Matemática.

---

3. A modo de conclusión.

Nuestra investigación afrontó el estudio de la integración de los marcos numérico, algebraico y geométrico con respecto al curso de EDO para la Licenciatura en Educación, especialidad Física-Electrónica, la que nos llevó a describir un inventario de los libros de textos y el enfoque predominante en cada uno de ellos, así como de nuestras posiciones epistemológicas y psicopedagógicas, que en ocasiones precisan las conocidas hasta este momento.

Es un hecho incuestionable en nuestros días la presencia del ordenador en casi todos los ámbitos de la vida cotidiana. El sistema educativo, no puede ni debe mantenerse al margen si pretende una enseñanza de calidad que forme ciudadanos capaces, y precisa incorporar el conocimiento y manejo de los ordenadores como uno de sus objetivos. Además, como hemos visto en el trabajo y en las diferentes fuentes consultadas para su elaboración, el ordenador ofrece interesantes posibilidades didácticas, que aúnan la capacidad de visualización gráfica del vídeo con la interactividad inherente al proceso de enseñanza-aprendizaje.
El término visualización es de uso reciente en Educación Matemática, para describir aspectos tales como:

> *"...en la visualización matemática lo que nosotros estamos interesados es precisamente en la habilidad de los estudiantes en dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel o con ordenador) para representar un concepto o problema matemático y utilizar el diagrama para alcanzar la comprensión, y como una ayuda en la resolución del problema ... Visualizar un problema significa comprender el problema en términos de un diagrama o imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnología) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la comprensión matemática".*

Zimmermann y Cunningham (1991).

Del trabajo realizado resulta necesario extraer algunos aspectos importantes que a modo de conclusiones resumimos:

- Creemos que con lo apuntado, se muestra cómo es posible integrar los marcos de solución de una EDO, con el objetivo que los estudiantes conozcan el significado de dicho objeto.
- Para la implementación de la propuesta se ha destacado el rol que desempeñan los paquetes simbólicos de cálculo y las calculadoras gráficas, por lo que los docentes deben profundizar en el uso de ellos.
- La elaboración de las secuencias didácticas, que constituye el núcleo fundamental de la Ingeniería Didáctica, depende de las condiciones de cada aula, profesor, institución, etc. Tal y como se tuvo en cuenta en la Transposición Didáctica (ver Anexo 1).

Tal como ya hemos señalado, el curso de EDO tiene que realizarse bajo la óptica de una integración de los tres escenarios discutidos antes. En concreto, la integración de estos, se ha mostrado como una herramienta poderosa que permite al estudiante, interactuar con los diversos marcos y desarrollar el pensamiento lógico de los mismos. De esta forma, el curso será más productivo.
La fundamentación de la propuesta, se ha revelado como punto de referencia importante para aplicar en futuras investigaciones. La propia concepción de la investigación como un proceso, nos abre un enorme campo de investigaciones en la "parcela" precisa del curso de EDO en otras especialidades. La puesta en práctica de la misma, abre un abanico de problemas que precisan nuevas investigaciones, entre las que destacamos los siguientes aspectos:

a) Diseño de una validación de la misma, incorporando nuevas situaciones de valoración de integración de los tres marcos;

b) Diseño e implementación de situaciones didácticas que propicien la reflexión metacognitiva;

Creemos que con el ejemplo apuntado, hemos presentado a los docentes una alternativa válida en el tratamiento didáctico del curso de EDO. Esta experiencia intenta de un modo general, crear en las clases de EDO un ambiente de investigación que interese al alumno, provocando la reflexión e intentando que los conocimientos que se vienen impartiendo, maduren con los entornos considerados, los que proporcionan una conexión de los conocimientos que no se había explotado antes, esta conexión estimula el uso dinámico de cada uno de ellos, tanto en problemas de la asignatura, como en clases de Óptica, Mecánica, etc. Basta repasar la riqueza que la experiencia dejó, para convencerse de lo dicho:

- Se usaron conocimientos de variadas áreas de la Matemática: análisis numérico, geometría, análisis clásico, etc. que comúnmente aparecen desligados del curso en cuestión.
- Se utilizó la PC no sólo como herramienta de cálculo, sino como un medio de razonamiento. La ecuación (1) resultó un ejemplo adecuado en esta dirección, el trazado de las soluciones mediante el paquete GRAPHMAT, arrojó interesantes observaciones sobre por qué no trazaba las soluciones como circunferencias concéntricas y sólo las tomaba como semicircunferencias que no "tocaban" el eje x.
- Se manejó el software matemático DERIVE, programa que enriquece notablemente la formación de todo alumno universitario, sobretodo, si éste será un profesor en el futuro.

Pero sin duda alguna, el aspecto más enriquecedor globalmente, fue el trabajo realizado con los tres marcos, mostrando a los estudiantes cuán fecunda y conveniente resulta esta unión.

En el trabajo **Nápoles y Negrón (2002)**, intentamos explicar la preeminencia del escenario algebraico en los cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, a partir de un esbozo histórico de éstas, enfocado, no a brindar una cronología de los resultados obtenidos, sino a los métodos, problemas, dificultades y obstáculos que han enfrentado los matemáticos en este campo de investigación, y su repercusión en los libros de textos más conocidos, por lo que creemos que puede ser interesante su consulta.

De esta forma, la Historia de la Matemática no es un simple conjunto de problemas históricos que introducir en clase, unas anécdotas biográficas que motiven al alumno, no es un recurso ocasional sino uno de los fundamentos epistemológicos de la actual reforma escolar (**Maza (1996)**).

Queremos señalar, algunas observaciones generales sobre la utilización de los recursos históricos en nuestras clases:

- casi toda la Matemática ha sido construida sobre una sucesión de ideas precedentes y como uno puede volver sobre esta cadena, la motivación para un problema se torna claro,

- los estudiantes al dedicarse a un problema original, se relacionan con la experiencia de la creación matemática, sin un interprete intermedio,

- además, algo muy relacionado con el punto anterior, los estudiantes son iniciados en el camino de la creación matemática de una forma práctica: investigación, publicación y discusión.

- la objetividad histórica no debe ceder ante las necesidades pedagógicas, sino integrarse a las mismas (ver **Garciadiego (1997)**), ejemplo de esto son los muy conocidos E.T. Bell-**"Men of Mathematics"**, New York, Simon and Schuster, 1937 y L. Infield-**"Whom the gods love"**, New York, Whittlesey House, 1948, mal concebidos como tratados históricos en virtud de un determinado interés motivacional.

A raíz de este trabajo, creemos útil destacar los siguientes aspectos a manera de epílogo:

1. La consideración del desarrollo histórico de los entes matemáticos, permite trabajar en la labor docente con las concepciones primarias de dichos entes, lo que indiscutiblemente ayuda a *clarificar* la comprensión de estos, por parte de los alumnos.

2. Que el significado de los objetos matemáticos debe tomarse en su triple significado: institucional, personal y temporal, es decir, el entorno en el cual se desarrolla la enseñanza de estos, *influye* sobre la interpretación que de estos se hagan los alumnos.

3. Que existen diferencias cualitativas entre el funcionamiento académico (a nivel de investigación, como "saber sabio") de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo ya que, por diversas causas, los usos y connotaciones de las nociones matemáticas tratadas en las instituciones de enseñanza son necesariamente *restringidas*.

4. Que detrás de toda teoría sobre la formación de conceptos, o más general, de toda teoría del aprendizaje hay unos presupuestos epistemológicos sobre la naturaleza de los conceptos o como afirma Thom: *"Toda la pedagogía de las Matemáticas, aún si apenas es coherente, descansa en una filosofía de la Matemática".*

5. Que la Matemática debe ser considerada como una clase de actividad mental, una construcción social que encierra conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados están sometidos a cambios revolucionarios y cuya validez, por tanto, puede ser *juzgada* con relación a un enclave social y cultural, contrario a la *visión absolutista (platónica)* del conocimiento matemático.

6. Que el enfoque unificador, proporcionado por la integración de los tres marcos considerados proporcionará, a la labor docente, más beneficios que dificultades.

BIBLIOGRAFIA

ARBELAEZ, G.I. (1995)-"Una aproximación histórico-filosófica a la demostración y el rigor matemático", Cali, UniValle, Tesis de Maestría.

BRODETSKY, S. (1919)–"The Graphical Treatment of Differential Equations", The Mathematical Gazette, Vol. IX, No. 142, pp. 377-382, pp. 3-8, pp. 35-38.

BOSCH, M. y J. GASCÓN (1994) –"La Integración del Momento de la Técnica en el Proceso de Estudio de Campos de Matemáticas", Enseñanza de las ciencias, Vol. 12, No. 3, pp. 314-332.

BOURBAKI, N. (1962)-"Arquitectura de las Matemáticas", en Le Lionnais y colaboradores (Eds.), "Las grandes corrientes del pensamiento matemático"**,** Buenos Aires: Universitaria de Buenos Aires, 36-49

CHEVALLARD, Y. (1985)-"La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné", Grenoble: La Pensée Sauvage.

DIAZ G.,J. y M.C. BATANERO (1994)-"Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.14, no.3, 325-355.

DIEUDONNÉ, J. (1972)- "Elementos de historia de las matemáticas", Madrid: Alianza Universidad.

DOUADY, R. (1986)–"Jeux de cadres et Dialectique outil-objet", Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, No. 2, pp. 5-31.

ERNEST, P. (1989)-"The knowledge, beliefs and attitudes of the Mathematics teacher: a model", J. Education for Teaching, Vol.15, No.1, 13-33.

ERNEST, P. (1992)-"The Nature of Mathematics: towards a social constructivist account", Science & Education 1, 89-100.

ERNEST, P. (1994a)-"What is social constructivism in the psychology of mathematics education", PME'94, Lisboa.

ERNEST, P. (1994b)-"Varieties of constructivism: their metaphors, epistemologies and pedagogical implications", Hiroshima J. of Mathematics Education 2, 1-14.

FLORES M., P. (1993)-“Formación práctica inicial de profesores de Matemáticas de Secundaria: algunas cuestiones de investigación sobre la planificación de la enseñanza y expectivas y necesidades de formación de los futuros profesores”, Material Didáctico, Universidad de Granada.

FLORES M., P. (1995)-“Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza”, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

GARCÉS, W. (1997)–“El Sistema de Tareas como Modelo de Actuación Didáctica en la Formación de Profesores de Matemática- Computación”, Tesis de Maestría, ISPH.

GARCIADIEGO, A. (1997)-“Pedagogía e historia de las ciencias, ¿simbiosis innnata?”, en “El velo y la trenza”, F. Zalamea (ed.), EUN (Colombia).

GERDES, P. (1991)-”Etnomatemática. Cultura, Matemática, Educação”, Instituto Superior Pedagógico, Maputo, Mozambique.

HALMOS, P.R. (1975)-“The teaching of problem solving”, American Mathematical Monthly 82(5), 446-470.

HERNANDEZ, A. (1994)-"Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, algebraico y gráfico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias", CINVESTAV-IPN, México.

HITT, F. (1978)-"Comportement de retour en arriere aprés la decouverte d'une contradiction", Tesis doctoral, Universidad Luis Pasteur.

HITT, F. (1992)–“Intuición en Matemática, representación y uso de la microcomputadora”, Memorias de la sexta reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, pp. 254-266.

HITT, F. (1994)-"Teacher’s Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions", Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol.16, Number 4, 10-20.

HITT, F.(1995)–“Intuición Primera Versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el paso de una Representación Gráfica a un Contexto real y Viceversa”, Revista Educación Matemática.

HERSH, R. (1986)-“Some proposals for revising the philosophy of mathematics”, en T. Tymoczko (ed.) New Directions in the philosophy of Mathematics, Boston: Birkhauser.

KLINE, M. (1985)-“Matemática. La pérdida de la certidumbre”, Madrid, Siglo XXI, 1985.

LAKATOS, I. (1986)-“A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?, en T. Tymoczko (ed.) New Directions in the philosophy of Mathematics, Boston: Birkhauser.

MAZA G., C. (1996)-”El dibujo del embaldosado: un ejemplo de matematización, SUMA, No.21, 89-96.

NAPOLES, J.E. (1997)-“Sobre el significado de los objetos matemáticos. El caso de los irracionales”, en COMAT’97, Universidad de Matanzas.

NAPOLES, J.E. y C. NEGRÓN (2002)-“La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contada por sus libros de texto”, Xixim, Revista Electrónica de Didáctica de la Matemática, Año 3, No.2, 33-57 (http://www.uaq.mx/matemáticas/redm/).

OLIVERAS, M.L. (1996)-”Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular”, Mathema 7, Granada.

PHILI, C. (s/f)-"Le developpement du concept de function", Seminario de Filosofía y de Matemáticas de la Escuela Normal Superior, París.

POLYA, G. (1963)-“Learning, teaching, and learning teaching”, American Mathematical Monthly, 70, 605-619.

PUTNAM, H. (1986)-“What is mathematical truth?, en T. Tymoczko (ed.) New Directions in the philosophy of

Mathematics, Boston: Birkhauser.

STEEN, L. (1988)-“The science of patterns”, Science 240, 611-616.

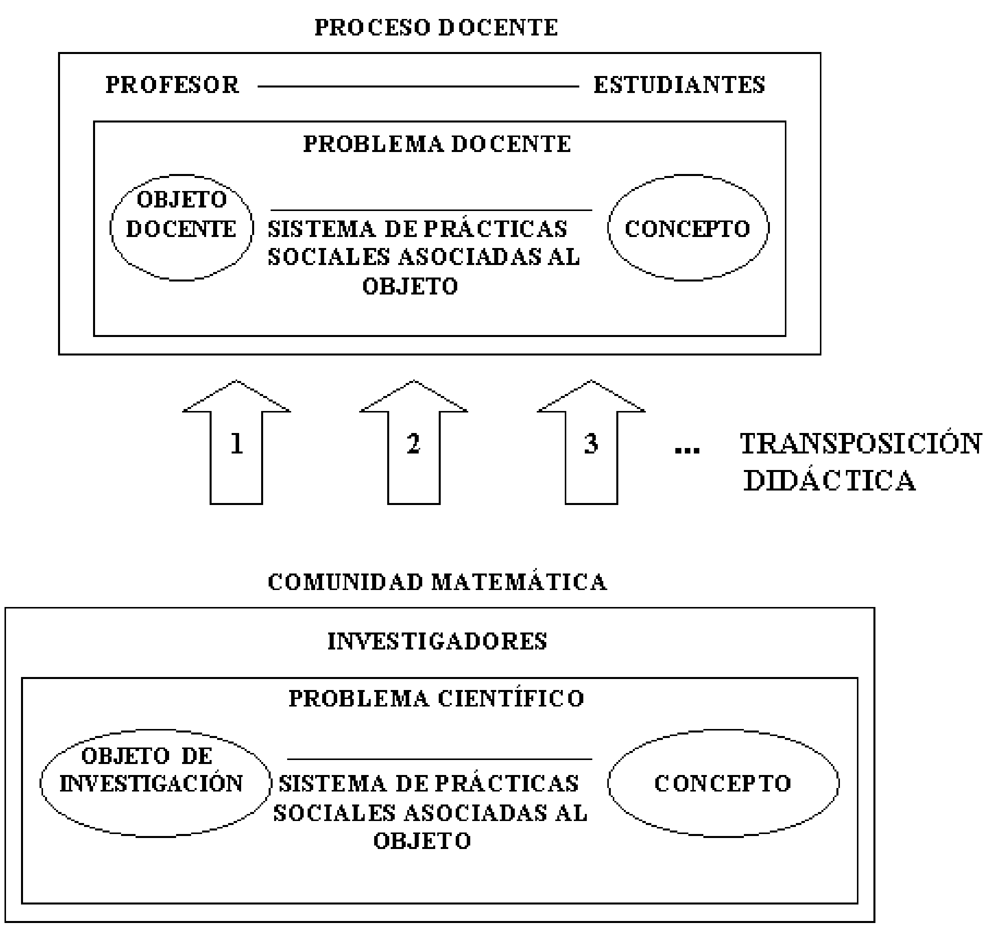
THOM, R. (1973)-“Modern mathematis: does it exist?, en A.G. Howson (ed.) Developments in mathematical education: Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education, 194-209, Cambridge: Cambridge University Press.

THOMPSON, A.G. (1984)-“The relationship of teachers’ conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice”, Educational Studies in Mathematics 15, 105-112.

THOMPSON, A.G. (1992)-“Teachers´ beliefs and conceptions: A synthesis of the research”, en D.A. Grouws (ed.), Handbok of Research on Mathematics Teaching and Learning, NCTM, MacMillan, New York.

ZIMMERMANN, W. and S. CUNNIGHAM (1991)–“Visualization in Teaching and Learning Mathematical”, Association of America, USA.

ANEXO 1



LEYENDA

1. ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO.
2. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR:

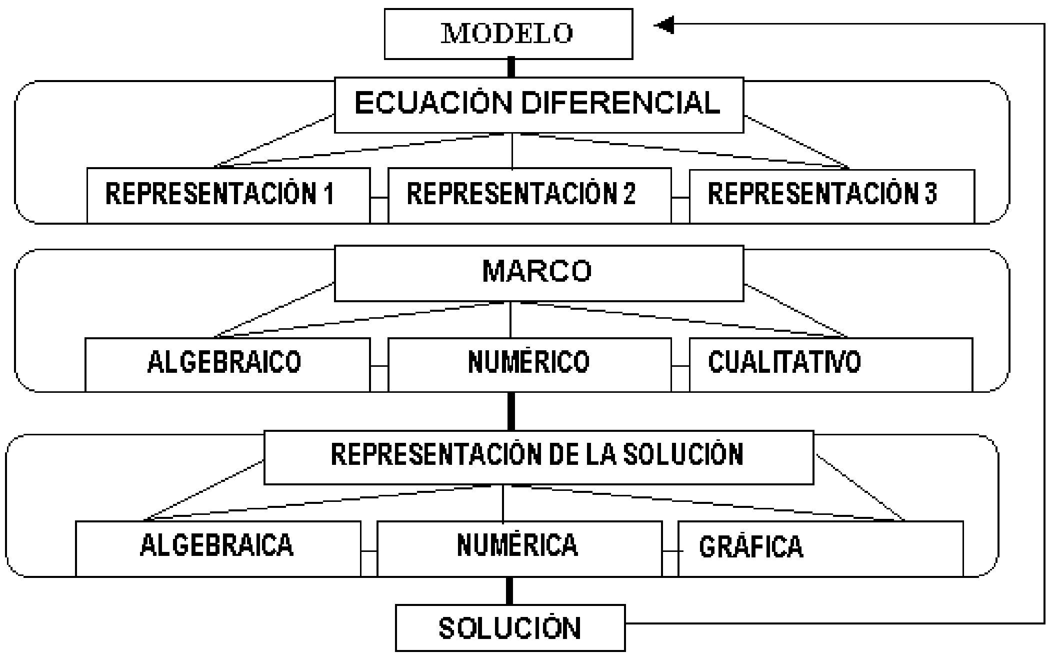
· De la Matemática.
· De otras materias.
· De la enseñanza de la Matemática (Pedagogía, Diseño Curricular, etc.)

- Dirección educacional (contexto sociocultural, lo que saben los estudiantes, etc.).
- Del contexto de la enseñanza.
- De educación.

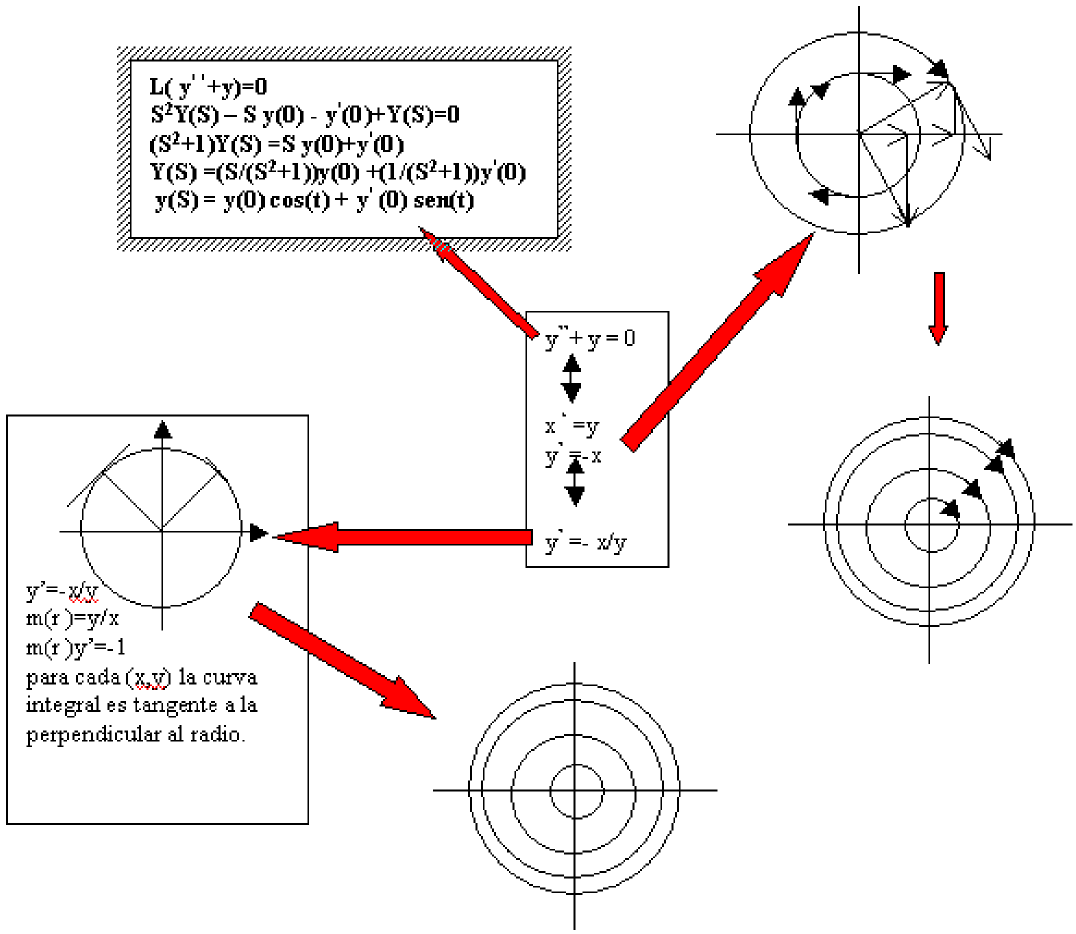
3. CREENCIAS DEL PROFESOR:

- Concepción de la naturaleza de la Matemática.
- Modelos de enseñanza-aprendizaje.
- Principios de la Educación.

ANEXO 2

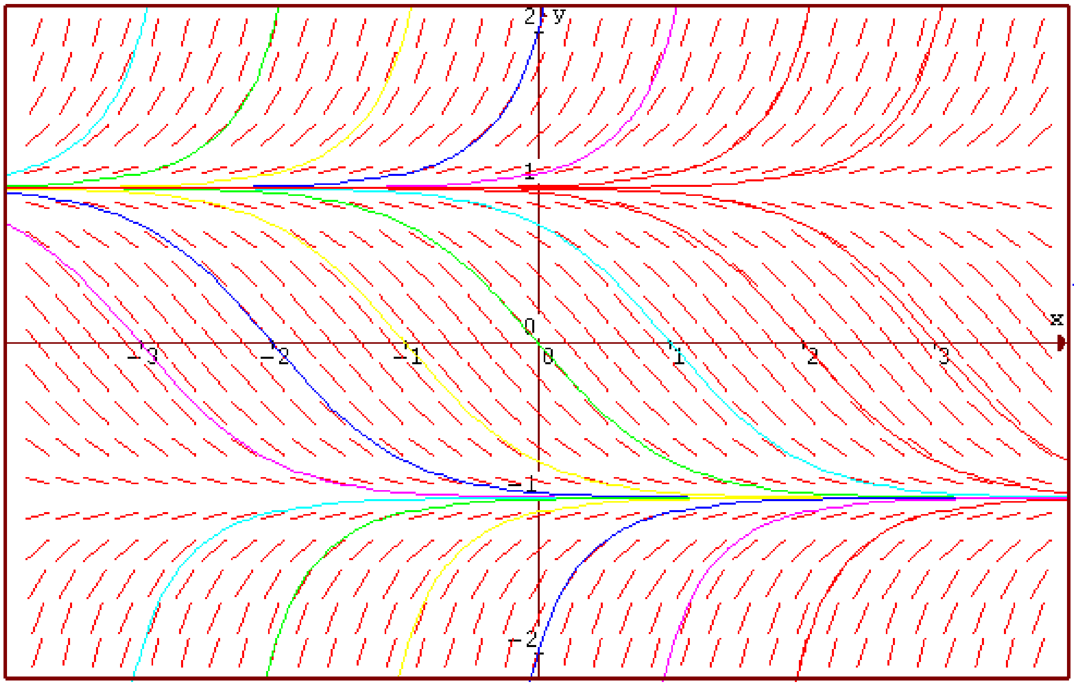


ANEXO 3



ANEXO 4

Campo de Pendientes de la Ecuación Diferencial $y'=y^2-1$.



[1] Douady aplica esta estructura para estudiar los procesos por los cuales los escolares puedan adquirir un saber matemático en una situación escolar.