Matrices con entradas enteras e inversa con entradas enteras

Walter Mora F.
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Resumen

Algunos artículos publicados en The American Mathematical Monthly discuten acerca de la construcción de matrices con entradas enteras, valores propios enteros y vectores propios con componentes enteras, en particular en [1] se hace una construcción que además permite construir, de manera sencilla, matrices con entradas enteras cuya inversa también tiene entradas enteras. En este artículo trata de estas últimas construcciones e incluye software en Java para generar y modificar ejemplos y para hacer operaciones de cálculo de la inversa de una matriz.

Palabras clave: Matrices, inversas, vectores y valores propios, operaciones elementales,matrices elementales, software didáctico, applet, Java.

Introducción:

Cuando se introducen las matrices en los cursos de álgebra lineal es a menudo conveniente dar ejemplos numericamente simples, para centrarse en el manejo de conceptos. Por esto es veces deseable operar con números enteros y poco con fracciones, para evitar equivocaciones de índole operacioneal. En este artículo vamos a dar unas cuantas recetas, siguiendo [1], de cómo obtener una buena variedad de ejemplos y de cómo modificarlos.

Construcción:

Consideremos un polinomio $p(\mu) = a_n + a_{n-1}\mu + \cdots + a_1\mu^{n-1} + \mu^n$ con $a_k \in \mathbb{C}$. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

es llamada la *matriz compañera* de $p(\mu)$ y se tiene que $p(\mu)$ es el polinomio característico de $A_{n\times n}$ y también su polinomio mínimo.

consideremos los k valores propios (complejos) $\beta_1,\, \beta_2,\, \cdots \beta_k$ de A con multiplicidad $m_1,\, m_2,\, \cdots m_k$ respectivamente. Supongamos que

$$p(\mu) = \Pi_{j=1}^{k}\,(\,\mu - \beta_j\,)^{m_j}$$

Para cada β de multiplicidad m se definen m vectores columna $V_1, \cdots, V_m$ de la siguiente forma

$$(V_j)_r = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le r \le j-1 \\ \dbinom{r-1}{j-1}\beta^{r-j} & \text{si} \qquad j \le r \le m \end{cases}$$

Al conjunto $\{V_1, \cdots, V_m\}$ se le llama *Cadena de Jordan* asociada a β

Por ejemplo, para β_1 tendríamos m_1 vectores columna

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_1^2 \\ \beta_1^3 \\ \beta_1^4 \\ \vdots \\ \beta_1^{n-1} \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\beta_1 \\ 3\beta_1^2 \\ 4\beta_1^3 \\ \vdots \\ (n-1)\beta_1^{n-2} \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3\cdot 2\beta_1/2! \\ 4\cdot 3\beta_1^2/2! \\ \vdots \\ (n-1)(n-2)\beta_1^{n-3}/2! \end{pmatrix} \quad \cdots$$

Para cada valor propio β, $p(\beta) = p'(\beta) = \cdots = p^{m-1}(\beta) = 0$. Se tiene por tanto

$$(A - \beta I) V_1 = 0$$

y para $j = 2, \cdots, m$

$$(A - \beta I) V_j = V_{j-1}$$

Finalmente, se tiene

Teorema:

Sea $A_{n\times n}$ es una matriz compañera con valores propios $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ con multiplicidad algebraica $m_1, m_2, \cdots, m_k$ respectivamente. Sea $\{W_1, \cdots, W_{m_1}\}$ la cadena de Jordan asociada a β_1, $\{W_{m_1+1}, \cdots, W_{m_1+m_2}\}$ la cadena de Jordan asociada a β_2,y así sucesivamente hasta llegar a β_k. Entonces para la matriz $Q = (W_1, W_2, \cdots, W_n)$ se cumple

a.) $Q^{-1}AQ = J$ donde J es la forma canónica de Jordan de A.

b.) Si A solo tiene los valores propios *enteros* $\beta_1,\ \beta_2$ y además estos valores propios difieren en ± 1, entonces Q y su inversa tienen entradas enteras

Observemos que si tomamos los β_j's enteros y los m_j's enteros y positivos, entonces podemos determinar la matriz compañera A, siguiendo la construcción inicial, y A tendría entradas enteras y valores y vectores propios enteros.

Modificar con operaciones elementales:

Si E se obtiene de I por medio de la operación elemental $hF_i + k\overline{F}_j$ (La barra indica que se modifica la fila j), es decir, $I \xrightarrow{hF_i+k\overline{F}_j} E$ con $h, k \neq 0$, entonces la matriz elemental E sería de la forma

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & h & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(si $i < j$). Además, en este caso

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & -\frac{h}{k} & \cdots & \frac{1}{k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Como se ve, si $k = \pm 1$ entonces E y su inversa tendrían entradas enteras.

Se sabe que si $Q \overset{hF_i, \pm \overline{F}_j}{\longrightarrow} Q'$ entonces

$$Q' = EQ \quad \text{y por tanto} \quad (Q')^{-1} = Q^{-1}E^{-1}$$

De ahí que, una vez construida Q (con entradas enteras), se pueden aplicar a Q operaciones elementales de la forma $hF_i, \pm \overline{F}_j$

y la matriz resultante tendrá entradas enteras y también inversa con entradas enteras.

En particular si ponemos $k = \pm 1$ y si $Q^{-1} = (a_{ij})$ entonces $Q^{-1}E^{-1}$ se obtiene modificando la columna i y la columna j de Q^{-1}

$$Q^{-1}E^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} - kha_{1j} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} - kha_{2j} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{ni} - kha_{nj} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

1. En el caso 2×2, los dos valores propios deberán tener multiplicidad 1, si ponemos $\beta_1 = \beta$ y $\beta_2 = \beta \pm 1$ entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1+\beta \end{pmatrix} \text{ y } \left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\beta & -\beta \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \beta-1 \end{pmatrix} \text{ y } \left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. En el caso 3×3, uno de los valores propios deberá tener multiplicidad 1 y el otro multiplicidad 2, si ponemos $\beta_1 = \beta$ y $\beta_2 = \beta + 1$ con $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$ entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \beta+1 & (\beta+1)^2 \\ 0 & 1 & 2(\beta+1) \end{pmatrix} \text{ y } \left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} (\beta+1)^2 & -2\beta-\beta^2 & \beta+\beta^2 \\ -2-2\beta & 2+\beta & -1-2\beta \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Si ponemos $\beta = -2$ se obtiene

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

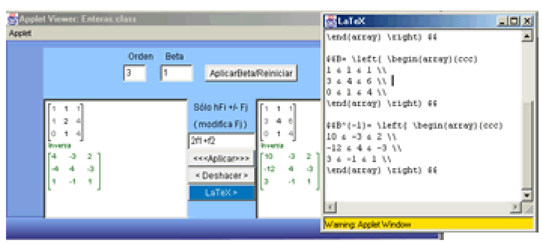
4. Si ponemos $\beta = -2$ y si le aplicamos a Q las operaciones $2F_1 + \overline{F}_2$ y $-2F_1 + \overline{F}_3$ de manera consecutiva, obtenemos en cada aplicación, lo siguiente

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (Q')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q'' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 9 \\ -2 & 5 & -10 \end{pmatrix} \qquad (Q'')^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 12 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

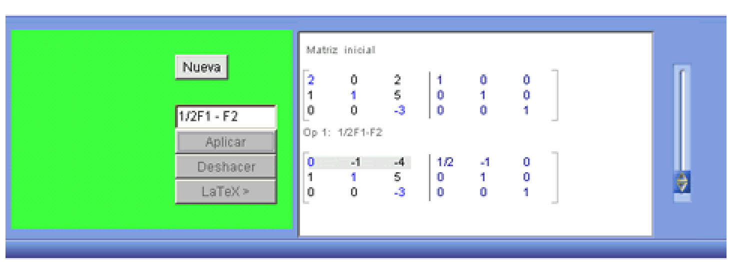
Software:

Este artículo incluye dos programitas (applets) en Java. El primero nos permite crear matrices con su respectiva inversa y nos permite modificar Q con operaciones elementales. Para esto solo necesitamos indicar el valor de β, en el campo de texto respectivo. Este programita permite generar el texto LaTeX de las 4 matrices.



> Correr el programa
> Descargar el programa

El segundo es un programita para aplicar operaciones elementales a una matriz con entradas enteras o fracciones (únicamente).



> Correr el programa
> Descargar el programa

Bibliografía:

1.
Gilbert, R. "Companion Matrices with Integer Entries and Integer Eigenvalues and Eigenvectors". American Mathematical Monthly. December, 1988.
2.
Renaud, J. C. "Matrices with Integer Entries and Integer Eigenvalues". American Mathematical Monthly. March, 1983.
3.
Noble, B. Daniel, J. "Algebra Lineal Aplicada". Prentice-Hall, 1989.