¿Por qué funciona la División Sintética?

Alexander Borbón Alpízar
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Estudiante del CINVESTAV (México)

Resumen

En este artículo se presenta la definición del algoritmo de la división sintética, se explica cómo se resuelve una división mediante este método y por último se presenta una justificación sencilla y accesible para entender por qué funciona este algoritmo.

- ¿Qué es la División Sintética?
- Forma "encebollada" del polinomio $P(x)$
- Justificación de la División Sintética
- Bibliografía
- Acerca de este documento ...

¿Qué es la División Sintética?

La División Sintética es un procedimiento abreviado para realizar la división de un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ de grado n, esto es $a_n \neq 0$, entre un polinomio lineal $x - c$. El procedimiento para realizar esta división es muy simple, primero se toman todos los coeficientes del polinomio $P(x)$ y la constante c, con estos se construye una especie de "casita" que ayudará en el proceso

$$\begin{array}{ccccc|c} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ & & & & & c \\ \hline \end{array}$$

Lo primero es "bajar" el coeficiente a_n, a este coeficiente también lo denotamos por b_{n-1}, luego se multiplica por la constante c, el resultado se coloca en la segunda columna y se suma al siguiente coeficiente a_{n-1}, al resultado lo denotamos b_{n-2}

$$\begin{array}{ccccc|c} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ \vdots & c\,b_{n-1} & & & & c \\ \hline \underbrace{a_n}_{b_n - 1} & \underbrace{cb_{n-1} + a_{n-1}}_{b_n - 2} & & & & \end{array}$$

Este último resultado se multiplica nuevamente por c y se le suma al coeficiente a_{n-2} y el proceso se repite hasta llegar a a_0.

Los resultados parciales que se obtienen se denotan por b_{n-1}, b_{n-2}, $\cdots$, b_1, b_0 (se inicia con b_{n-1} pues el cociente tiene un grado menos que el dividendo), y el último valor obtenido se denota por r, pues es el residuo de la división, de esta manera lo que se obtiene es

$$\begin{array}{ccccc|c} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ \vdots & cb_{n-1} & \cdots & & & c \\ \hline \underbrace{a_n}_{b_n-1} & \underbrace{cb_{n-1}+a_{n-1}}_{b_n-2} & \cdots & \underbrace{cb_1+a_1}_{b_0} & \underbrace{cb_0+a_0}_{r} & \end{array}$$

Así, el cociente de la división de $P(x)$ por $x - c$ es $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x^1 + b_0$ con un residuo r, en donde los coeficientes se detallan como

$$\begin{gathered} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1} \\ b_{n-3} = cb_{n-2} + a_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 = cb_2 + a_2 \\ b_0 = cb_1 + a_1 \\ r = cb_0 + a_0 \end{gathered}$$

EJEMPLO 1 (*División Sintética*)
Realice la división de $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 2$ entre $x + 2$.

Solución

Al realizar el algoritmo de la división sintética con los coeficientes de $P(x)$ y -2 como valor de c se obtiene

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 & 2 & \\ & -6 & 8 & -14 & 20 & -2 \\ \hline 3 & -4 & 7 & -10 & 22 & \end{array}$$

Así, el cociente de la división de $P(x)$ entre $x + 2$ es $3x^3 - 4x^2 + 7x - 10$ y se obtiene un residuo $r = 22$.

Forma "encebollada" del polinomio $P(x)$

Se tomará el polinomio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ y lo vamos a factorizar para expresarlo de forma "encebollada", para esto se saca a factor común la variable x y se repite el proceso n - 1 veces, veamos

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$
$$\Longrightarrow \quad P(x) = (a_nx^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_2x + a_1)x + a_0$$
$$\Longrightarrow \quad P(x) = ((a_nx^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$
$$\vdots$$
$$\Longrightarrow \quad P(x) = (((\ldots(((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \ldots + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

Esta manera de expresar al polinomio es la mejor para evaluar los polinomios en programas de computación, en los cursos de algoritmos se encuentra que genera menos errores y es más eficiente. Si se evalúa este polinomio en c se obtiene

$$P(c) = (((\ldots(((a_n c + a_{n-1})c + a_{n-2})c + a_{n-3})c + \ldots + a_3)c + a_2)c + a_1)c + a_0$$

Ahora se verá cómo es que se evalúa al polinomio, se inicia con a_n, luego se multiplica por c y se le suma a_{n-1}, al resultado obtenido anteriormente se le multiplica por c y se le suma a_{n-2}, y así sucesivamente hasta llegar a sumar el valor a_0; a estos resultados parciales se les denotará como b_{n-1}, $b_{n-2}, \ldots,$ b_1, b_0 y al último término que se obtiene se denotará como r, se debe observar que este último valor es la evaluación completa del polinomio, por lo que también le llamaremos $P(c)$, así

$$P(c) = ((\ldots(((\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_n}_{b_{n-1}} c + a_{n-1})}_{b_{n-2}} c + a_{n-2})}_{b_{n-3}} c + \ldots + a_2)}_{b_1} c + a_1)}_{b_0} c + a_0$$

Si se continúa con este proceso hasta llegar a a_0 se puede observar que

$$\begin{gathered}
b_{n-1} = a_n \\
b_{n-2} = b_{n-1}c + a_{n-1} \\
b_{n-3} = b_{n-2}c + a_{n-2} \\
\vdots \\
b_2 = b_3 c + a_3 \\
b_1 = b_2 c + a_2 \\
b_0 = b_1 c + a_1 \\
r = P(c) = b_0 c + a_0
\end{gathered}$$

Si se comparan estos resultados con los coeficientes que se obtienen luego de efectuar el proceso de la división sintética, se observa que son equivalentes, es decir que ¡este es el mismo proceso!, lo interesante es preguntarse ¿por qué esta forma de evaluar el polinomio da los coeficientes del cociente y el residuo si se toman los resultados parciales?

Justificación de la División Sintética

De los coeficientes descritos en la sección anterior, el más sencillo de justificar es el residuo, ya que es claro que el residuo es la evaluación del polinomio en c, es decir $r = P(c)$. Recordando, el teorema del residuo enuncia que si se divide un polinomio $P(x)$ entre un polinomio lineal $x - c$, entonces el residuo de la división es $P(c)$ (Ver Apéndice), con esto queda demostrado que efectivamente el último término que da la división sintética es el residuo de la división, ahora solo queda demostrar que los demás coeficientes efectivamente son los coeficientes del cociente de la división de $P(x)$ entre $x - c$.

Por definición de división de polinomios, al dividir un polinomio $P(x)$ entre $x - c$ se debe encontrar un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = (x - c)Q(x) + r$, denotando a $Q(x)$ como $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$ se obtiene

$$P(x) = (x - c)[b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0] + r$$

Desarrollando se tiene

$$P(x) = b_{n-1}x^{n} - cb_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-1} - cb_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-2} + \cdots - cb_2x^2 + b_1x^2 - cb_1x + b_0x - cb_0 + r$$

Emparejando términos semejantes y factorizando cada una de estas parejas, se llega a

$$P(x) = b_{n-1}x^{n} + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - cb_{n-2})x^{n-2} + \cdots + (b_1 - cb_2)x^2 + (b_0 - cb_1x)x + (r - cb_0)$$

Y como, desde un inicio

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

Y para que estas dos fórmulas sean iguales tiene que suceder que los coeficientes de cada potencia sean iguales, es decir, tiene que pasar que

$$\begin{gathered}
b_{n-1} = a_n \\
b_{n-2} - cb_{n-1} = a_{n-1} \\
b_{n-3} - cb_{n-2} = a_{n-2} \\
\vdots \\
b_1 - cb_2 = a_2 \\
b_0 - cb_1 = a_1 \\
r - cb_0 = a_0
\end{gathered}$$

Y, por último, al despejar el primer término en cada igualdad se obtiene

$$\begin{gathered}
b_{n-1} = a_n \\
b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1} \\
b_{n-3} = a_{n-2} + cb_{n-2} \\
\vdots \\
b_1 = a_2 + cb_2 \\
b_0 = a_1 + cb_1 \\
r = a_0 + cb_0
\end{gathered}$$

¡Los mismos coeficientes que se obtienen por división sintética! Esta es la razón por la que el procedimiento de la división sintética funciona, los coeficientes del cociente al dividir un polinomio entre un polinomio lineal se obtienen multiplicando cada resultado parcial por c y sumándole el coeficiente siguiente, iniciando con el valor de a_n. Hay que hacer el comentario que la división sintética sólo funciona cuando se divide por un polinomio lineal $x - c$, si se divide por algún otro polinomio se debe hacer la división larga o factorizar el divisor y dividir por cada uno de los factores (este procedimiento sólo funciona si todos los factores, excepto tal vez el último, dan como residuo cero).

Apéndice

Definición 1 *(División de Polinomios)*
Sea $P(x)$ cualquier polinomio y sea $S(x)$ un polinomio no nulo, entonces existen dos únicos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

en donde el grado de R(x) es menor que el grado de $S(x)$. Los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ son el *cociente* y el *residuo* de la división de $P(x)$ entre $S(x)$, respectivamente. Los polinomios $P(x)$ y $S(x)$ son el *dividendo* y el *divisor*, respectivamente.

TEOREMA 1 *(Teorema del Residuo)*
Si c es una constante y un polinomio $P(x)$ es dividido por $x - c$, entonces el residuo obtenido es igual a $P(c)$, lo cual es la evaluación de $P(x)$ en c.

Demostración

Como el grado del polinomio que se obtiene de residuo es menor que el grado del divisor y en este caso el divisor es de grado uno, entonces el residuo es una constante, denotemos a este residuo con r y el cociente con $Q(x)$, por la definición de división de polinomio $P(x)$ se puede expresar como

$$P(x) = (x - c)Q(x) + r$$

Ahora, si se evalúa esta última expresión en c se obtiene

$$P(c) = (c - c)Q(c) + r$$

$$P(c) = r$$

Por lo tanto, el residuo es igual a $P(c)$

Bibliografía

1
Cárdenas, H. et all. "Álgebra Superior". Triga, México, 1973.

2
Dickson, L. "New First Course in the Theory of Equations". Jhon Wiley and Sons, New York, 1962.

Derechos Reservados