Algunas equivalencias topológicas del Axioma del Extremo Superior

MSc Luis Alejandro Acuña.
Escuela de Matemática,
Instituto Tecnológico de Costa Rica.

En este artículo se presentan cuatro propiedades topológicas del conjunto de los números reales, IR, que, evidentemente o no, resultan ser todas equivalentes al Axioma del Extremo Superior (AES).

1. Definiciones y notación

Veamos primero algunas definiciones (para otras definiciones más básicas, vea también el Glosario).
Si X es un espacio métrico, entonces:

(a) X es *completo* si cualquier sucesión de Cauchy en X es convergente.

(b) X es *conexo* si no es la unión de dos conjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos.

(c) X cumple la propiedad de *Heine-Borel* (X es HB) si todo subconjunto de X, cerrado y acotado, es compacto.

(d) X cumple la propiedad de *Cantor* si cualquier sucesión decreciente de conjuntos cerrados en X, no vacíos, tiene intersección no vacía.

Además, si X es totalmente ordenado entonces X es *orden-completo* si todo subconjunto no vacío de X, acotado superiormente, tiene extremo superior. Y si X es un campo ordenado entonces X es *arquimediano* si para cualesquiera x, $y \in X$ con $0 < x$ existe $n \in$ IN tal que $y < n \cdot x$.
(Aquí $n \cdot x$ significa $x + \cdots + x$, donde $+$ es la suma en el campo X. IN, por supuesto, denota al conjunto de los números naturales y podría no estar contenido en X; de ahí la necesidad de hacer explícito lo que entendemos por $n \cdot x$.)

Ya sabemos que IR cumple todas esas propiedades. Al construir IR axiomáticamente se requiere que sea un cuerpo totalmente ordenado (axiomas de campo y de orden) y que sea orden-completo (AES). Entonces puede demostrarse que IR satisface esas cuatro propiedades recién enunciadas: completitud, conexidad, propiedades de Heine-Borel y de Cantor, y arquimedianidad (todas esas demostraciones pueden encontrarse en [Apostol]).

En cualquier demostración de estas propiedades se usa, directa o indirectamente, el AES. Veremos dentro de poco que ese axioma es indispensable. Más aún, veremos que cada una de las propiedades (a)-(d) es equivalente al AES, y la manera de hacerlo será *demostrar* el citado axioma a partir de dichas propiedades de IR.

Un poco de notación: Si X es un espacio métrico y $A \subset X$, entonces:

(a) $\bar{A}$ es la *adherencia* o *clausura* de A: $\bar{A} = \{ x \in X \mid$ cualquier abierto que contenga a x interseca a $A \}$.

(b) $\mathring{A}$ es el *interior* de A: $\mathring{A} = \{ x \in X \mid$ existe un abierto contenido en A que contiene a $x \}$.

2. Algunos lemas

Antes de enunciar y probar el teorema que motiva este artículo, definamos nuestra posición. Olvidemos lo que sabemos de IR. Supongamos solamente que IR es un cuerpo totalmente ordenado, y a partir de esto veamos "¿qué pasaría si IR fuera completo, o conexo, o HB, etc.?" Empecemos con unos lemas sencillos pero muy útiles.

Lema 1: *Si $A \subset$ IR, x es cota superior (cs) de A, y $x \in A$, entonces existe sup$A$ y es igual a x.*

Prueba:
Por estar x en A, x es menor que cualquier otra cota superior de A. Es decir, x es la menor de las cotas superiores de A.

Lema 2: *Sea $A \subset$ IR. Si $\bar{A}$ tiene extremo superior, entonces también A lo tiene y los dos son iguales.*

Prueba:

(i) Que sup $\bar{A}$ es cs de A: Inmediato, porque $A \subset \bar{A}$.

(ii) Sea $\epsilon > 0$. Que sup $\bar{A} - \epsilon$ no es cs de A:
Como sup $\bar{A} - \epsilon/2$ no es cs de $\bar{A}$, existe $x \in \bar{A}$ tal que

$$\sup \bar{A} - \epsilon/2 < x.$$

Además, como $x \in \bar{A}$, hay un $y \in A$ tal que $|x - y| < \epsilon/2$; es decir, tal que

$$y - \epsilon/2 < x < y + \epsilon/2$$

Conectando las desigualdades obtenemos sup $\bar{A} - \epsilon/2 < x < y + \epsilon/2$.
Esto implica que sup $\bar{A} - \epsilon < y$.
Por lo tanto, sup $\bar{A} - \epsilon$ no es cs de A.

De los puntos (i) y (ii) se concluye que sup $\bar{A}$ = sup A.

Lema 3: IR *es arquimediano* $\Leftrightarrow$ IN *no es acotado superiormente.*

Prueba:

"$\Rightarrow$": Para cada $y \in$ IR existe un $n \in$ IN tal que $y < n \cdot 1 = n$ (tomando $x = 1$ en la definición de arquimedianidad). Esto quiere decir que ningún $y \in$ IR es cs de IN.

"$\Leftarrow$": Sean $x, y \in$ IR con $0 < x$. Como IN no es acotado superiormente, y / x no es cs de IN, por lo que existe $n \in$ IN tal que $y/x < n$, y de aquí que $y < n \cdot x$.

3. El teorema central

El siguiente teorema constituye la parte central de este artículo. Recuerde que todo lo que se sabe de IR es que es un campo totalmente ordenado.

Teorema: *Las siguientes cinco afirmaciones son equivalentes:*

(a) IR *es orden-completo (AES)*

(b) IR *es conexo*

(c) IR *es HB*

(d) IR *es arquimediano y completo*

(e) IR *es arquimediano y cumple la propiedad de Cantor.*

Es bien sabido que (a) implica las otras cuatro afirmaciones. Lo que haremos en este artículo es probar los recíprocos. Es decir, probaremos el AES de cuatro maneras distintas.

El plan de demostración es, simplemente, (b)⇒(a), (c)⇒(a), (d)⇒(a) y (e)⇒(a). Posiblemente no sea éste el camino más corto, pero creo que sí es bastante ilustrativo.

En cada caso supondremos que $A \subset$ IR es no vacío y acotado superiormente, y demostraremos que A tiene extremo superior.

3.1 Prueba de (b)⇒(a)

Suponemos que IR es conexo.

La demostración es indirecta. Suponga que A no tiene extremo superior, y considere

$$S = \{ \ x \ \in IR \mid x \text{ no es cs de } A \ \}.$$

Como $A \neq \emptyset$, existe algún $y \in A$, para el cual y-1 $\in S$. Entonces $S \neq \emptyset$.

Además, veamos que S es abierto: Sea $x \in S$. Por definición de S, x no es cs de A; por lo tanto hay un $y \in A$ tal que $x < y$. Entonces

$$x \in \,]-\infty, y[\, \subset S.$$

(La última inclusión se debe a que como $y \in A$, cualquier real menor que y no es cs de A.) Por lo tanto $x \in \mathring{S}$. Como $x \in S$ era arbitrario entonces S es abierto.

Por aparte, considere

$$T = \{ \ x \ \in \text{IR} \mid x \text{ es cs de } A \ \}.$$

Como A es acotado superiormente, $T \neq \emptyset$.

Veamos también que T es abierto: Si $x \in T$ entonces x es cs de A pero no es la menor (la menor cota superior sería el extremo superior). De ahí que existe otro $y \in T$ tal que $y < x$. Entonces

$$x \in \,]\, y,\infty \,[\, \subset T.$$

(La última inclusión se debe a que como y es cs de A, cualquier real mayor que y es también cs de A.)

Finalmente, es claro que IR = $S \cup T$ y que $S \cap T = \emptyset$. Es decir, IR es la unión disjunta de dos conjuntos abiertos, lo cual contradice la suposición de que IR era conexo.

> ***Comentarios:*** Aquí la idea es que si A no tiene extremo superior, en el lugar donde éste estaría hay un espacio vacío. Es decir, la frontera entre el conjunto de cotas superiores (que es *T,* a la derecha del espacio) y el conjunto de no-cotas (*S,* a la izquierda), debería ser sup$A$, pero no existe. Esto da una disconexión de IR.

Por cierto, la demostración no necesitaba ser indirecta. Si hubiéramos definido S y T como lo hicimos, igual probaríamos que S es abierto. Pero entonces T, por ser el complemento no vacío de S, no puede ser abierto. Por lo tanto algún $b \in T$ no es interior, por lo que pertenece a S. Con un pequeño esfuerzo puede demostrarse que
$b = \sup A$.

3.2 Prueba de (c)⇒(a)

Suponemos que IR es *HB*.

Tome cualquier $a \in A$ y defina

$$A' = \overline{\{ x \in A \mid x \geq a \}}.$$

Entonces, como IR es HB, A' debe ser compacto porque:

(i) Es obvio que A' es cerrado.

(ii) A' es acotado superiormente por cualquier cota superior de A.

(iii) A' es acotado inferiormente por a, porque si $b < a$ entonces $b < \frac{a+b}{2} < a$, y $]-\infty, \frac{a+b}{2}[$ es un vecindario de b que no interseca $\{ x \in A \mid x \geq a \}$, de modo que $b \notin A'$.

Supongamos ahora que no existe $\sup A'$. Entonces por el Lema 1 tenemos que para cualquier $x \in A'$, x no es cs de A' y entonces hay un $y_x \in A'$ tal que $x < y_x$.

Ahora es claro que $\{]-\infty, y_x[\mid x \in A' \}$ es un cubrimiento abierto de A', y por compacidad existen $x_1, x_2, ..., x_n \in A'$ tales que

$$A' \subset \bigcup_{i=1}^{n}]-\infty, y_{x_i}[=]\infty, y_0[$$

donde $y_o = \max\{ y_{x_1}, ..., y_{x_n} \}$. Pero esto último es contradictorio, porque y_o pertenece a A' pero no a $]-\infty, y_o[$.

Luego, A' debe tener extremo superior, y según el Lema 2 también A debe tenerlo, como queríamos probar.

Comentarios: Sabemos que A es acotado superiormente. Si también lo fuera inferiormente, su adherencia sería compacta. En todo caso, "recortamos" A en cualquier punto y eliminamos todo a la izquierda de ese punto. Lo que queda es acotado superior e inferiormente, y su adherencia es lo que denotamos A', compacto. Y los subconjuntos compactos de IR deben tener extremo superior: si no, cada $x \in A'$, por no ser cota, tendría un vecindario abierto que se extendería a la derecha de x pero sin "salirse a la derecha" de A'. Esto daría un cubrimiento abierto de A' sin cubrimiento finito, contradiciendo la compacidad de A'.

3.3 Prueba de (d)⇒(a)

Suponemos que IR es completo y arquimediano.

Tome cualquier $x_1 \in A$ y construya inductivamente la sucesión $(x_n) \subset A$:

(i) Si x_n es cs de A, entonces $x_n = \sup A$ por el Lema 1. Con esto termina la prueba.

(ii) Si x_n no es cs de A, sea $y \in A$ tal que $x_n < y$. Entonces $0 < y - x_n$, y por arquimedianidad existe $k \in IN$ tal que $1 < k\,(y - x_n)$, de donde $\frac{1}{k} < y - x_n$ por lo que

$$x_n + \frac{1}{k} < y$$

Entonces $x_n + \frac{1}{k}$ no es cs de A, y de ahí que el conjunto

$$B_n = \{\ k \in \text{IN} \mid x_n + \frac{1}{k} \text{ no es cs de } A\ \}$$

no es vacío. Sea $k_n = \min B_n$, y sea x_{n+1} un elemento de A tal que
$x_n + \frac{1}{k_n} < x_{n+1}$.

Si la condición (i) se cumple para algún $n \in$ IN, la prueba termina. Si no, se obtienen dos sucesiones: $(x_n) \subset A$ y $(k_n) \subset$ IN. La primera es claramente creciente, y la última tiende a infinito (vea la prueba en el Apéndice). Entonces podemos probar que (x_n) es de Cauchy:

En efecto, sea $\epsilon > 0$. Como $k_n \to \infty$, existe $N \in$ IN tal que $k_N > 1 + \frac{1}{\epsilon}$, o bien $\frac{1}{k_N - 1} < \epsilon$.

Por la definición de k_N resulta que $x_N + \frac{1}{k_N - 1}$ sí es cs de A, y entonces para todo $n > N$ tenemos $x_N < x_n < x_N + \frac{1}{k_N - 1}$ (porque $x_n \in A$). Por lo tanto

$$|\,x_n - x_m\,| < \frac{1}{k_N - 1} < \epsilon$$

para cualesquiera n, $m > N$, lo que demuestra que la sucesión (x_n) es de Cauchy.

Ahora, como suponemos que IR es completo, (x_n) debe converger; sea $b = \lim x_n$. Como (x_n) es creciente, $x_n < b$ para todo n.

Veamos por último que $b = \sup A$:

(i) Que b es cs de A:

Sea $c > b$. Como $k_n \to \infty$, existe $n \in$ IN tal que $k_n > 1 + \frac{1}{c-b}$; luego

$$c > b + \frac{1}{k_N - 1} > x_n + \frac{1}{k_N - 1},$$

y como este último número es cs de A, concluimos que $c \notin A$, $\forall\, c > b$.

(ii) Sea $\epsilon > 0$. Que $b - \epsilon$ no es cs de A:

Como $x_n \to b$, existe $n \in$ IN tal que $|b - x_n| < \epsilon$, por lo que $b - \epsilon < x_n$.

Como $x_n \in A$, $b - \epsilon$ no puede ser cs de A.

Por lo tanto, $b = \sup A$, con lo que acaba la prueba.

Comentarios: Aquí se construye una sucesión de Cauchy dentro de A, que crezca "lo más rápido posible", de la siguiente manera:

Se escoge $x_1 \in A$. Si $x_1 + 1$ no es cs de A, se escoge $x_2 \in A$, mayor que $x_1 + 1$; si $x_2 + 1$ no es cs de A se escoge $x_3 \in A$ mayor que x_2+1, y así se continúa. Cuando $x_i + 1$ sí sea cs de A, se prueba con $x_i + \frac{1}{2}$, $x_i + \frac{1}{3}$, etc, hasta encontrar un k tal que $x_i + \frac{1}{k}$ no sea cs de A y se pueda escoger $x_{i+1} > x_i + \frac{1}{k}$, pero tomando k lo menor posible para que el salto de x_i a x_{i+1} sea lo mayor posible.

Así se construye una sucesión (x_n) cuyo límite es mayor o igual que cualquier elemento de A, y como además la sucesión está toda en A, su límite no puede ser mayor que ninguna cs de A; esto es, $\lim x_n = \sup A$.

3.4 Prueba de (e)⇒(a)

Suponemos que IR es arquimediano con la propiedad de Cantor.

Sea $i \in$ IN. Tome una cs y de A; como IR es arquimediano, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $y < k\frac{1}{i}$, de modo que k / i también es cs de A. Entonces el conjunto $\{ k \in \mathbb{Z} \mid k / i \text{ es cs de } A \}$ no es vacío. Sea k_i su mínimo (de modo que k_i / i es cs de A pero $(k_i-1) / i$ no lo es).

Ahora defina, para $n = 1, 2, ...,$

$$B_n = \bigcap_{i=1}^{n} \left[\frac{k_i - 1}{i}, \frac{k_i}{i} \right]$$

Veamos que $B_n \neq \emptyset$: Como $m = \max\{ \frac{k_i - 1}{i} \mid i = 1, ..., n \}$ no es cs de A, y $M = \min\{ \frac{k_i}{i} \mid i = 1, ..., n \}$ sí lo es, entonces $m < M$. Así, $B_n = [m, M] \neq \emptyset$.

Ahora, por la propiedad de Cantor (es claro que (B_n) es una sucesión decreciente de cerrados), la intersección B de los B_n no es vacía. Además tiene sólo un punto, porque si $x, y \in B$ entonces

$$|x - y| < \frac{k_i}{i} - \frac{k_i - 1}{i} = \frac{1}{i} \quad \forall i \in \mathrm{IN},$$

lo que por arquimedianidad implica que $| x - y | = 0$; es decir, $x = y$.

Llamemos b a este único elemento de B, y veamos que $b = \sup A$:

(i) Que b es cs de A:

Sea $x > b$. Por arquimedianidad existe $i \in$ IN tal que $1 < i (x-b)$, de donde sigue que $1/i < x-b$ y entonces $b < x - 1/i$.

Además, como $b \in B$, debe ser $(k_i - 1) / i \leq b$.

Conectando las dos últimas desigualdades tenemos que

$$\frac{k_i}{i} - \frac{1}{i} < x - \frac{1}{i} \quad \Rightarrow \quad \frac{k_i}{i} < x$$

y como k_i/i es cs de A, se concluye que $x \notin A$, $\forall\, x > b$.

(ii) Sea $\epsilon > 0$. Que $b - \epsilon$ no es cs de A:

Por arquimedianidad existe $i \in$ IN tal que $1/i < \epsilon$. Como $b \leq k_i/i$ entonces

$$b - \epsilon < b - \frac{1}{i} \leq \frac{k_i - 1}{i}$$

Y como $(k_i - 1) / i$ no es cs de A, $b - \epsilon$ tampoco puede serlo.

En conclusión, $b = \sup A$.

Comentarios: La idea aquí es "encajar" el extremo superior de A con intervalos cuyos extremos derechos forman una sucesión decreciente de cotas de A y cuyos extremos izquierdos forman una sucesión creciente de no-cotas de A, ambas sucesiones convergiendo a un mismo punto que debe ser entonces la frontera entre las cotas y las no-cotas; es decir, $\sup A$.

4. Conclusión

Hemos demostrado que el Axioma del Extremo Superior es equivalente a cada una de cuatro propiedades topológicas del conjunto IR. No todo lo que hicimos es exclusivo de IR, sin embargo.

Por ejemplo:

- La equivalencia entre (a) y (b) es válida sustituyendo IR por cualquier conjunto X totalmente ordenado y con la topología del orden (vea el Glosario), y tal que para todos los $a, b \in X$, si $a < b$ existe $c \in X$ tal que $a < c < b$. En realidad, en presencia de un orden total (y la topología que induce) esta última condición, junto con (a), es equivalente a (b). (Vea [Kelley], ejercicio 1.I.d.).

- También la equivalencia entre (a) y (c) es válida sustituyendo IR por cualquier conjunto totalmente ordenado y con la topología del orden (vea [Kelley], ejercicio 5.C).

Como dijimos antes, el camino seguido aquí no es el más corto. Por ejemplo, se sabe que la propiedad de Cantor y la completitud son equivalentes en cualquier espacio métrico (Teorema de Cantor, vea [Iribarren], Sección 5.6). Además, el hecho de que todo espacio métrico compacto es completo ([Iribarren], Sección 5.3) permitía utilizar (d)⇒(a) para probar (c) ⇒(a). Sin embargo, me parece que el camino que seguimos ilustra más directamente las relaciones entre el AES y las demás propiedades con las que tratamos.

Hay otra propiedad de IR que, según he oído, equivale también al AES: cualquier función real definida sobre un intervalo $[a,b]$, continua casi por doquier, es Riemann-integrable. Dejo abierto el problema.

5. Apéndice

Faltó demostrar que la sucesión $(k_n) \subset IN$, construida en (d)⇒(a), tiende a ∞. He aquí la prueba, pero primero recordemos que

$$B_n = \{\ k \in IN \mid x_n + \tfrac{1}{k} \text{ no es cs de } A\ \} \quad y \quad k_n = \min B_n.$$

Notemos dos resultados preliminares. En primer lugar, que (k_n) es creciente: Como $x_{n+1} + \frac{1}{k_{n+1}}$ no es cs de A, existe $y \in A$ tal que

$$x_{n+1} + \frac{1}{k_{n+1}} < y.$$

Y como claramente $x_n < x_{n+1}$, entonces $x_n + \frac{1}{k_{n+1}} < y$, así que $x_n + \frac{1}{k_{n+1}}$ no es cs de A; es decir, $k_{n+1} \in B_n$. Por último, como $k_n = \min B_n$, debe ser $k_n \leq k_{n+1}$. Por lo tanto la sucesión (k_n) es creciente.

Y en segundo lugar, veamos por inducción que

$$x_{n+1} > x_1 + \frac{n}{k_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}:$$

Para $n = 1$, es simplemente la definición de x_2. Y si lo suponemos cierto para algún n, entonces:

$$x_{n+2} > x_{n+1} + \frac{1}{k_{n+1}} > x_1 + \frac{n}{k_n} + \frac{1}{k_{n+1}} \geq x_1 + \frac{n}{k_{n+1}} + \frac{1}{k_{n+1}} = x_1 + \frac{n+1}{k_{n+1}},$$

así que la afirmación vale también para n+1.

Ahora estamos listos para probar que $k_n \to \infty$. Sea $M \in$ IR. Debemos probar que existe un $N \in$ IN tal que $n \geq N \Rightarrow k_n > M$. Podemos suponer que $M > 0$.

Tome cualquier cs c de A. Por arquimedianidad, existe un $N \in$ IN tal que $c - x_1 < N\ \frac{1}{M}$; es decir, $x_1 + \frac{N}{M} > c$. Como además $x_{N+1} \in A$ y c es cs de A, y recordando la desigualdad que acabamos de probar, tenemos

$$x_1 + \frac{N}{M} > c \geq x_{N+1} > x_1 + \frac{N}{k_N},$$

de donde concluimos que $M < k_N$.

Y por último, como (k_n) es creciente, resulta que $k_n \geq k_N > M$ para todo $n \geq N$, como queríamos probar.

6. Glosario

Acotado (conjunto):

(a) Si A está contenido en un conjunto ordenado X, se dice que A es acotado superiormente (inferiormente) si admite una cota superior (inferior) en X.

(b) Si A está contenido un un espacio métrico (X,d), entonces A es acotado si $\{\ d(x,y) \mid x, y \in A\ \}$ es acotado superiormente en IR.

Campo -cuerpo- (totalmente) ordenado:

Se dice que $(K, +, \times, \leq)$ es un campo (totalmente) ordenado si $(K, +, \times)$ es un campo en el sentido algebraico usual, $(K, \leq)$ es un conjunto (totalmente) ordenado, y para todos los $a, b, c \in K$ se cumple:

(i) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$, y

(ii) $0 \leq a, 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \times b$.

Cota:

Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado, $c \in X$ y $A \subset X$, entonces c es una cota superior (inferior) de A si para todo $x \in A$ se cumple $x \leq c$ ($c \leq x$).

Extremo superior:

Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado, $b \in X$ y $A \subset X$, entonces b es el extremo superior de A ($b = \sup A$) si:

(i) b es cota superior de A, y

(ii) cualquier otra cota superior de A es mayor que b (en IR, esta condición es equivalente a que $\forall \epsilon > 0$, $b - \epsilon$ no es cs de A).

Una formulación equivalente es decir que $\sup A$ es la menor de las cotas superiores de A.

Ordenado (conjunto):

Si X es un conjunto y $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva en $X \times X$, entonces $(X, \leq)$ es un conjunto preordenado.

Si además $\leq$ es antisimétrica entonces $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado.

Y si además, para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple $x \leq y$ ó $y \leq x$, entonces $(X, \leq)$ es totalmente ordenado.

Topología del orden:

Si $(X, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, la topología del orden $\leq$ en X es la generada por los conjuntos de la forma $]-\infty, a[= \{ x \in X \mid x < a \}$ y los de la forma $]a,\infty[= \{ x \in X \mid a < x \}$, para $a \in X$.

Es decir, los abiertos son las uniones de conjuntos de la forma $]a,b[= \{ x \in X \mid a < x < b \}$, para $a, b \in X$.

7. Referencias

- Apostol, T. Análisis Matemático.
- Kelley, J. Topología General.
- Iribarren, I. Topología de Espacios Métricos.

Revista Virtual, Matemática Educación e Internet.
Derechos Reservados.