

Cálculo del valor de las funciones seno y coseno para ángulos múltiplos de 3, medidos en grados

Edwin Castro,
Escuela de Matemática, UCR.

Harold Böcker,
Liceo Rodrigo Facio, Costa Rica.

Resumen:

Presentamos el cálculo de las funciones seno y coseno para los ángulos múltiplos de 3 medidos en grados. Se hace uso de las propiedades que presentan los triángulos respectivos. Al final del trabajo se resumen las fórmulas obtenidas.

1.Introducción

De manera frecuente, los estudiantes nos hacen la siguiente pregunta: "¿de cuáles ángulos se pueden calcular en forma exacta las funciones trigonométricas?". Aunque la pregunta así formulada carece de precisión, nosotros entendemos bien qué es lo que quiere saber el estudiante.

Cuando el estudiante aprende las funciones trigonométricas se le introducen éstas para los ángulos de 45° , 30° , 60° .

En efecto, con construcciones geométricas muy sencillas como las que se señalan a continuación, las cuales aparecen en todos los manuales de secundaria, el estudiante calcula:

$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

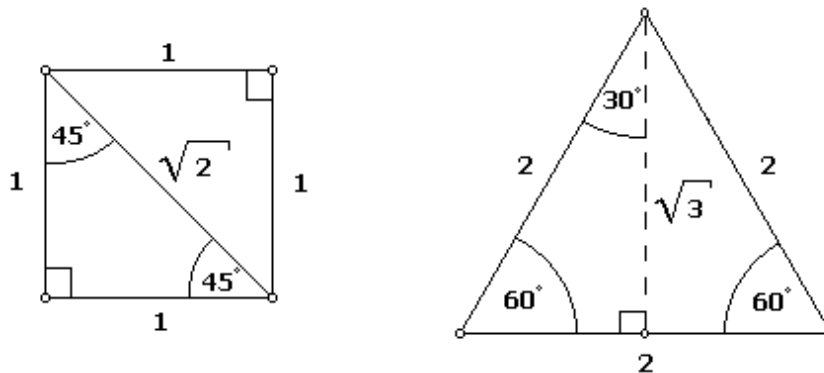
$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$



Ahora sí entendemos lo que quería decir el estudiante cuando preguntaba sobre las funciones trigonométricas que se pueden calcular en "forma exacta". Nosotros no nos ocuparemos de comentar estos términos. Más adelante cuando el estudiante aprende la definición de las funciones seno y coseno mediante el círculo trigonométrico aparecen:

$$\text{Sen } 0^\circ = 0 \quad \text{Sen } 90^\circ = 1$$

$$\cos 0^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0$$

Aunque el estudiante aprende a calcular senos y cosenos de ángulos mayores de 90° los valores de dichas funciones no son diferentes a los anteriores, con excepción de cambios de signo por la posición de los ángulos en los diversos cuadrantes.

Una tabla de este tipo la tomamos de ([7]) y se ilustra más adelante (para ángulos en el primer cuadrante). En este trabajo nos proponemos calcular el valor de las funciones seno y coseno de los ángulos múltiplos de 3 medidos en grados.

En ([1] y [6]) se prueba que un ángulo de m° es constructible si y solo si m es múltiplo de 3.

De las fórmulas bien conocidas:

$$\sin (90^\circ - \alpha^\circ) = \cos \alpha^\circ$$

$$\cos (90^\circ - \alpha^\circ) = \sin \alpha^\circ$$

$$\sin (-\alpha^\circ) = -\sin \alpha^\circ$$

$$\cos (-\alpha^\circ) = \cos \alpha^\circ$$

Se ve que es suficiente trabajar con ángulos entre 0° y 45° , lo que permitirá calcular las funciones trigonométricas de cualquier ángulo de m° con m entero.

En ([2],[3],[4],[5]) se calculan algunas de las funciones que volveremos a presentar aquí.

Angulo A en grados	Angulo A en radianes	sen A	cos A	tg A	cotg A	sec A	cosec A
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
15°	$\pi/12$	$\frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
75°	$5\pi/12$	$\frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1

En ([2],[3],[4],[5]) se calculan algunas de las funciones que volveremos a presentar aquí.

Angulo A en grados	Angulo A en radianes	sen A	cos A	tg A	cotg A	sec A	cosec A
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
15°	π/12	$\frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$
30°	π/6	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
75°	5π/12	$\frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$
90°	π/2	1	0	±∞	0	±∞	1

En ([2]) se calcula $\tan\left(1\frac{1}{2}\right)^\circ$, fórmula que reproducimos a continuación:

$$\tan\left(1\frac{1}{2}\right)^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(95 - 17\sqrt{30} + 24\sqrt{15} - 29\sqrt{10} - 37\sqrt{6} + 41\sqrt{5} + 54\sqrt{3} - 65\sqrt{2})}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(95 - 17\sqrt{30} + 24\sqrt{15} - 29\sqrt{10} - 37\sqrt{6} + 41\sqrt{5} + 54\sqrt{3} - 65\sqrt{2})}$$

2.Cálculo de las funciones seno y coseno de 15°

En algunos manuales aparecen los valores de estas funciones, para nuestra comodidad las calcularemos aquí.

Utilizando las fórmulas del ángulo medio tenemos:

$$\sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{3}{2}}}{2}} =$$

$$\text{sen}15^\circ =$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Las expresiones $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ y $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ pueden simplificarse con ayuda de las fórmulas:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

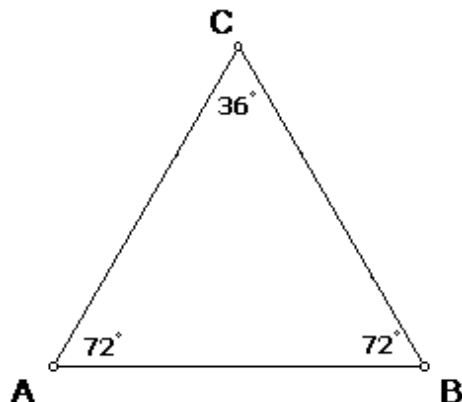
Así tenemos:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

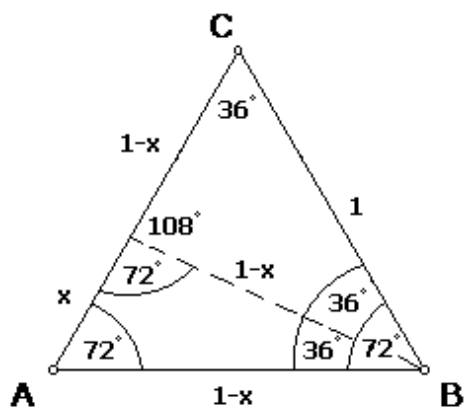
3. Cálculo de las funciones seno y coseno de $36^\circ, 18^\circ, 27^\circ, 9^\circ$

Para calcular estas funciones trigonométricas de 36° se utiliza un triángulo isósceles como el que se ilustra en la figura:



Se observa que este triángulo tiene una propiedad muy particular, la cual es que al trazar la bisectriz de uno de los ángulos de 72° , por ejemplo B, se forman dos triángulos isósceles, así

como se ilustra en la figura que sigue:



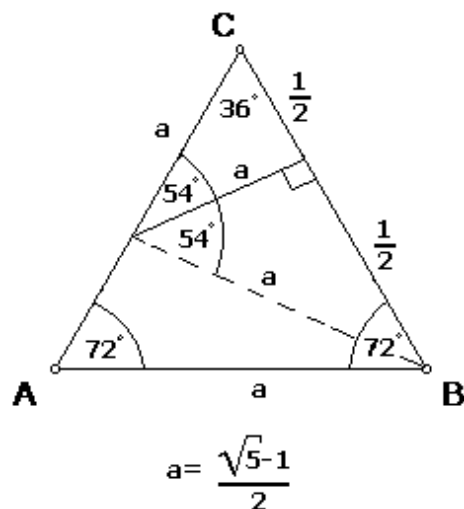
En la figura se trazó la bisectriz del ángulo B. Aplicando el teorema de la bisectriz se obtiene:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{x}$$

Así se deduce que:

$$1-x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si en el triángulo anterior trazamos también la bisectriz del ángulo de 108° obtenemos los datos siguientes:



De la figura anterior se deduce:

$$\text{sen } 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\operatorname{sen} 54^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Utilizando las fórmulas del ángulo medio calculamos:

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\operatorname{sen} 27^\circ = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$\cos 27^\circ = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$\operatorname{sen} 9^\circ = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$\cos 9^\circ = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{4}$$

4.Cálculo de las funciones seno y coseno de los ángulos de $24^\circ, 12^\circ, 6^\circ, 3^\circ$

Tenemos que $54^\circ - 30^\circ = 24^\circ$, así:

$$\operatorname{sen} 24^\circ = \operatorname{sen} (54^\circ - 30^\circ)$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sen} 54^\circ \cos 30^\circ - \cos 54^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\
&= \frac{1}{8} \left[\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 24^\circ &= \cos 54^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 54^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\
&= \frac{1}{8} \left[\sqrt{5} + 1 - \sqrt{10 - 6\sqrt{5}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 12^\circ &= \frac{\operatorname{sen} 24^\circ}{2} \\
&= \sqrt{\frac{1 - \cos 24^\circ}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 12^\circ &= \frac{\cos 24^\circ}{2} \\
&= \frac{\sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}}{4}
\end{aligned}$$

También se tiene que $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$ y entonces :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 6^\circ &= \operatorname{sen} 36^\circ \cos 30^\circ - \cos 36^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\
&= \frac{1}{8} \left[\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 6^\circ &= \cos 36^\circ \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 36^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\
&= \frac{1}{8} \left[\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3} \right]
\end{aligned}$$

Con las fórmulas del ángulo medio se obtiene:

$$\operatorname{sen} 3^{\circ} = \frac{\sqrt{8 - \sqrt{15} - \sqrt{3} - \sqrt{10} - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 3^{\circ} = \frac{\sqrt{8 - \sqrt{15} - \sqrt{3} - \sqrt{10} - 2\sqrt{5}}}{4}$$

5. Cálculo de las funciones seno y coseno de ángulo con medidas de 21° , 33° , 39° ó 42° .

Utilizando las relaciones:

$$21^{\circ} = 36^{\circ} - 15^{\circ}$$

$$33^{\circ} = 36^{\circ} - 3^{\circ}$$

$$39^{\circ} = 54^{\circ} - 15^{\circ}$$

$$42^{\circ} = 60^{\circ} - 18^{\circ}$$

Calculamos:

$$\operatorname{sen} 21^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{16} \left[2 \sqrt{10 + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - \sqrt{15}} - \sqrt{15} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + 1 \right]$$

$$\operatorname{cos} 21^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{16} \left[2 \sqrt{10 - 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + \sqrt{15}} + \sqrt{15} + \sqrt{5} + \sqrt{3} + 1 \right]$$

$$\operatorname{sen} 33^{\circ} = \frac{\sqrt{8 + \sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10} - 2\sqrt{5}} + \sqrt{24 - 3\sqrt{15} - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{10} - 2\sqrt{5}}}{8}$$

$$\operatorname{cos} 33^{\circ} = \frac{\sqrt{8 + \sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10} - 2\sqrt{5}} + \sqrt{24 - 3\sqrt{15} - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{10} - 2\sqrt{5}}}{8}$$

$$\operatorname{sen} 39^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16} \left[\sqrt{15} + \sqrt{5} + \sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{10 - 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + \sqrt{15}} \right]$$

$$\operatorname{cos} 39^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16} \left[2\sqrt{10 + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - \sqrt{15}} + \sqrt{15} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - 1 \right]$$

$$\operatorname{sen} 42^\circ = \frac{1 - \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}}{8}$$

$$\operatorname{cos} 42^\circ = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}$$

Valores de las funciones Seno y Coseno para los ángulos múltiplos de 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 0^\circ = 0 \\ \operatorname{cos} 0^\circ = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 3^\circ = \frac{\sqrt{8 - \sqrt{15} - \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{4} \\ \operatorname{cos} 3^\circ = \frac{\sqrt{8 + \sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{4} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 6^\circ = \frac{\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1}{8} \\ \operatorname{cos} 6^\circ = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 9^\circ = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}{4} \\ \operatorname{cos} 9^\circ = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}{4} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}12^\circ = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}}{4} \\ \operatorname{cos}12^\circ = \frac{\sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \\ \operatorname{cos}15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}18^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} = \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{4} \\ \operatorname{cos}18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}39^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16} \left[\sqrt{15} + \sqrt{5} + \sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{10 - 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + \sqrt{15}} \right] \\ \operatorname{cos}39^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16} \left[2\sqrt{10 + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - \sqrt{15}} + \sqrt{15} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - 1 \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}42^\circ = \frac{1 - \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}}{8} \\ \operatorname{cos}42^\circ = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}27^\circ = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{4} \\ \operatorname{cos}27^\circ = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2} \\ \operatorname{cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}33^\circ = \frac{\sqrt{8 + \sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{24 - 3\sqrt{15} - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{8} \\ \operatorname{cos}33^\circ = \frac{\sqrt{24 + 3\sqrt{15} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{8 - \sqrt{15} - \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \\ \operatorname{cos}36^\circ = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}39^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16} \left[\sqrt{15} + \sqrt{5} + \sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{10 - 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + \sqrt{15}} \right] \\ \operatorname{cos}39^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16} \left[2\sqrt{10 + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - \sqrt{15}} + \sqrt{15} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - 1 \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}42^\circ = \frac{1 - \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}}{8} \\ \operatorname{cos}42^\circ = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{cos}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Bibliografía

1. **D.Mac Hale:** Constructing Integer Angles. Math.Gaz.
66,144-145(1982)

2. **J.M.Peters:** About $\tan\left(1\frac{1}{2}\right)^\circ$. Math.Gaz.

69,211-212(1985)

3. **Desmond Mac Hale:** Some Lesson Known irrational number.
M.G.67,282-284(1983)

4. **Castro Edwin, Mora Gerardo:** Senos Trigonómicos y Polinomios reales de Variable real. Las Matemáticas y su enseñanza.
8(3),27-33.(1991)

5. **Castro Edwin, Mora Gerardo:** Problemas Matemáticos Célebres III: La Trisección del ángulo (II). Ciencias Matemáticas 2(2), 1-8.(1991)
6. **Castro Edwin, Mora Gerardo:** La Trisección del ángulo: Aspectos antiguos y Modernos. Las Matemáticas y su enseñanza 12-13 (5):45-52.(1993)
7. **Spiegel R. Murray, Abellanas Lorenzo:** Fórmulas y tablas de la matemática aplicada. Mac Graw Hill, Serie de Compendios Schaum. Madrid (1988)