Una Construcción Elemental de las Funciones Exponencial y Logarítmica

Dr. Santiago Cambronero
Escuela de Matemática - Universidad de Costa Rica
scambro@emate.ucr.ac.cr

Resumen

Se presenta una construcción rigurosa de la función exponencial con base en aproximaciones decimales de números reales y utilizando herramientas relativamente simples de la teoría de sucesiones numéricas. Visto desde la óptica de un docente de secundaria, esta construcción es la formalización de la construcción intuitiva que siempre hemos enseñado a los muchachos.
En la primera parte se se repasa la completitud de ***IR*** y sus consecuencias, así como algunas nociones básicas de sucesiones. La segunda parte prsenta paso a paso, la construcción de la función exponencial con exponente racional y en la tercera parte se extiende esta definición a exponentes reales. La presentación es completada con ejercicios que le ayuden al lector a profundizar un poco más en el tema, de acuerdo con los conocimientos previos

El trabajo esta dirigido a profesores y futuros profesores de secundaria. Se ha evitado en lo posible el uso de herramientas matemáticas sofisticadas, con el fin de hacer la lectura apropiada a la mayor audiencia posible.

Introducción

En la enseñanza secundaria se introducen intuitivamente las funciones exponencial y logarítmica, y se utilizan sus propiedades en la resolución de problemas. Dicha presentación intuitiva, deja sin embargo algunos sinsabores, como por ejemplo: ¿cómo explicar lo que significa $2^{\sqrt{2}}$? Sería discutible si deba irse un poco más allá y presentar al estudiante de secundaria una construcción rigurosa de la función exponencial. Pero lo que sí parece importante, es que el docente debe estar preparado para responder cualquier pregunta que pueda surgir en este sentido. Debemos entonces al menos familiarizarnos con los detalles que le dan rigor a toda esa mecánica de la potenciación, lo que a la vez nos ayudaría en la elaboración de técnicas didácticas que exploten mejor la idea intuitiva que la sustenta.

Comúnmente, en la literatura la función exponencial se presenta de una manera prácticamente axiomática, aceptando su existencia y sus propiedades, y muchas veces, sin dar siquiera una idea intuitiva de lo que pasa en el caso de exponentes irracionales. Una construcción ``rigurosa" de dicha función se presenta después de haber estudiado integración, construyendo primero la función logarítmica como una integral definida. Dicha construcción, además de usar una herramienta relativamente sofisticada, esconde en alguna medida la naturaleza de la función exponencial. Debemos sin embargo reconocer la importancia histórica de este método. En efecto, son los logaritmos y no las potencias, los primeros en definirse, al menos intuitivamente, para todo el continuo de los números reales (Neper 1614 - 1620, y Bürgi 1620).

Ahora, para hacer una construcción elemental de la función exponencial, hay varias posibilidades. Si se utiliza directamente el axioma del extremo superior, la labor se hace bastante tediosa, perdiendo el gusto en los detalles técnicos. Hay que anotar además que el axioma del extremo superior, en su forma común, es bastante difícil de entender y manipular.

En el presente trabajo se presenta una construcción más intuitiva, sobre todo para un docente de secundaria, acostumbrado a trabajar con expansiones decimales. Visto desde la óptica de la completitud, es la misma construcción mencionada arriba, pero enriquecida con el uso del teorema de Weierstrass y las propiedades elementales de convergencia de sucesiones. Visto desde la óptica de un docente de secundaria, es la formalización de la construcción intuitiva que siempre hemos enseñado a los muchachos.

Se ha evitado en lo posible el uso de herramientas del cálculo diferencial que podrían enturbiar la presentación. De la teoría de límites solamente se utiliza el teorema del emparedado, y del cálculo diferencial únicamente el concepto de derivada, para motivar la existencia del número e. Sin embargo, la demostración de dicha existencia se hace independientemente del cálculo diferencial.

El trabajo consta de tres capítulos. En el primero repasamos la completitud de IR y sus consecuencias, así como nociones básicas de sucesiones. El lector familiarizado con estos temas puede pasar directamente al segundo capítulo, donde hacemos la construcción para exponentes racionales. La parte central del trabajo se realiza en el tercer capítulo, donde se define la función exponencial sobre todo el continuo de los números reales, usando las nociones de expansión decimal y convergencia de sucesiones monótonas. La presentación es complementada con ejercicios que le ayudan al lector a profundizar un poco más en el tema, de acuerdo con sus conocimientos previos. Particularmente, en el tercer capítulo se presentan ejercicios que requieren de ciertos conocimientos de cálculo diferencial. El lector que no tiene dichos conocimientos, debe hacer caso omiso de estos ejercicios.

El trabajo está dirigido a profesores y futuros profesores de secundaria. Surge de una inquietud sobre la manera en que este tema es enseñado en los colegios, lo que me motivó a realizar, en el año 1999, un pequeño ciclo de dos charlas, en el marco del *Seminario de Enseñanza para la Educación Secundaria,* de la Escuela de Matemática (UCR). El aporte de los asistentes a dichas charlas, fue de gran provecho para darle forma final al trabajo.

Preliminares

Subsecciones

- Un poco de historia
- Completitud de *IR*
- Inducción y buen orden
    - Definiciones por recurrencia
- Densidad de *IQ*
- Existencia de raíces
- Un barniz de sucesiones
    - Convergencia
- Expansiones decimales
- Ejercicios

Un poco de historia

La noción de progresión geométrica no es nueva en Matemática. Existe evidencia que muestra que los egipcios y babilonios manejaban este concepto, y desde luego también los griegos. En *Los elementos* de Euclides aparece un enunciado que establece la igualdad

$$a^{m+n} = a^m a^n,$$

para n y m enteros positivos.

Ya en la Edad Media, N. Oresme (francés, s. XIV) vuelve a hallar esta regla, hablando de exponentes racionales, y estableciendo otras identidades como

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}, \quad (a^m)^{p/q} = (a^{mp})^{1/q}.$$

Sus ideas, muy avanzadas para la época, no fueron entendidas, y un siglo después N. Choquet las retoma, introduciendo además exponentes enteros no positivos. En esta época se consolida la función exponencial (no conocida como tal) como isomorfismo entre los números reales (no conocidos como tales). En el siglo XVI, el matemático alemán Stifel completó el trabajo, introduciendo exponentes racionales arbitrarios, y el paso a exponentes reales fue realizado por J. Neper[2.1] (o Napier) y J. Bürgi entre 1614 y 1620, de manera intuitiva. Desde entonces, y hasta mediados del siglo XIX, se admitió esta manera intuitiva de pasar a exponentes reales, al no disponerse de una teoría sólida de números reales que permitiera hacerlo más rigurosamente.

Aunque hoy en día se enseñan a veces como un tema aislado, lo cierto es que los logaritmos (y por ende, las potencias) aparecieron como una herramienta de cálculo. En efecto, al parecer ya Arquímedes utilizaba la idea de reducir la multiplicación de dos números (potencias de 2, por ejemplo), por medio de la suma de sus logaritmos. Pero el verdadero auge de los logaritmos, como herramienta de cálculo, sobre todo en navegación, finanzas y cálculos astronómicos, comienza en el siglo XVI con Stifel, y se consolida a inicios del XVII con Neper y Bürgi, y posteriormente con la construcción de las primeras tablas de logaritmos en base 10, realizadas por H. Briggs (1631).

Las tablas de logaritmos se fueron perfeccionando a través de los años, y fueron utilizadas en los cálculos y en la enseñanza hasta hace relativamente poco tiempo. La era de la computación fue haciendo que las tablas fueran más fáciles de elaborar, pero también las hizo innecesarias, pues ahora es más simple presionar un par de teclas en la calculadora, que buscar mantizas y características.

Con el nacimiento del Cálculo Infinitesimal, las funciones exponencial y logarítmica comienzan a tener importancia desde un punto de vista teórico, al comenzar a ser estudiadas sus propiedades diferenciales. La importancia teórica de estas funciones ha invadido casi la totalidad de las áreas de la Matemática, sobre todo aquellas en que las nociones del cálculo diferencial e integral están presentes. Por otro lado, su importancia desde un punto de vista aplicado va mucho más allá de su uso en los cálculos numéricos. Estas funciones ya no se enseñan más como simple herramienta de cálculo numérico, sino como base de modelos sofisticados y poderosa herramienta teórica en diferentes áreas del quehacer científico.

Completitud de *IR*

La propiedad de completitud de *IR* dice que los números reales ``rellenan la recta numérica", o que no ``dejan huecos en la recta". Es decir, a cada punto de la recta le corresponde un número real. Pero ¿qué significa esto matemáticamente?. En otras palabras, cómo escribir esto con el lenguaje propio de la teoría de números reales, sin hacer alusión a la interpretación geométrica de éstos como puntos de una recta.

Para tratar de precisar esto, tomemos un punto P en la recta, y consideremos el conjunto A formado por todos los números reales ``ubicados" a la izquierda de ese punto. Consideremos también el conjunto $B$ formado por todos los números reales ``ubicados" a la derecha del mismo punto. Tenemos entonces que para $x \in A$ y $y \in B$ se cumple $x \leq y$. La completitud dice que hay un número real α que corresponde al punto P, y por lo tanto $x \leq \alpha \leq y$, para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

Interpretación geométrica de la completitud

Esto nos sugiere la siguiente forma de axiomatizar la completitud:

Axioma de completitud (versión 1) Sean A y B subconjuntos no vacíos de IR, tales que $x \leq y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Entonces existe al menos un número real α tal que $x \leq \alpha \leq y$, para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

Para aclarar mejor este concepto veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.2.1 Si $A = \{ x \in IQ^+ : x^2 < 2 \}$ y $B = \{ x \in IQ^+ : x^2 > 2 \}$, entonces $\alpha = \sqrt{2}$ es el único número real que satisface la condición del axioma de completitud.

Ejemplo 2.2.2 Si $A =]-\infty, 0[$ y $B = [1, 2]$, entonces cualquier $\alpha \in [0, 1]$ satisface la condición del axioma.

Ahora consideremos un conjunto $A \subseteq IR$ no vacío, y definamos

$$B = \{b \in IR : \forall x \in A, b \geq x\}. \tag{2.1}$$

Este conjunto B podría ser vacío, veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.2.3 Si $A = [0, 4[$, entonces $B = [4, +\infty[$. El mismo B se obtiene si $A =]-\infty, 4]$.

Ejemplo 2.2.4 Si $A = [1, \infty[$, entonces $B = \emptyset$. En efecto, si existiera $b \in B$, se tendría en particular $b \geq 1$, así que $b + 1$ sería elemento de A, y consecuentemente $b \geq b + 1$, lo cual es imposible.

Cuando $B \neq \emptyset$ decimos que A es acotado superiormente, y a cada elemento de B se le llama cota superior de A. Más precisamente:

Definición 2.2.1 Un conjunto $A \subseteq R$ se llama acotado superiormente si existe $b \in IR$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in A$. En tal caso, se dice también que b es una cota superior de A.

Ejemplo 2.2.5 Retomando los ejemplos anteriores, tenemos que los intervalos $[0, 4[$ y $]-\infty, 4]$ son acotados superiormente, mientras que el intervalo $[1, +\infty[$ no lo es. En el caso $A = [0, 4[$, la menor cota superior es $b = 4$. Lo mismo ocurre en el caso $A =]-\infty, 4]$.

Cuando A es acotado, el conjunto B dado por (2.1) es, entonces, el conjunto de cotas superiores de A. En tal caso, el axioma de completitud establece la existencia de un número real α tal que $x \leq \alpha \leq y$, para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. En particular se tiene $x \leq \alpha$ para cada $x \in A$, así que $\alpha \in B$. Como además $\alpha \leq y$, para todo $y \in B$, tenemos que α es el menor elemento de B. Es decir, α es la menor cota superior de A, y en particular es único. A este número se le llama el extremo superior de ***A, o supremo de A, y se denota $\alpha = \sup A$. Esto muestra la versión común del axioma de completitud, que llamaremos*** axioma del extremo superior. ***Primero definamos en detalle el concepto de extremo superior:***

Definición 2.2.2 Sea $A \subset IR$ acotado superiormente y no vacío. Un elemento $\alpha \in IR$ se llama el extremo superior (o supremo) de A si es la menor de sus cotas superiores. Dicho de otra forma, α es el extremo superior de A si satisface:

(1)
α es cota superior de A.

(2)
Si $b \in IR$ es cota superior de A, entonces $\alpha \leq b$.

Axioma del extremo superior (versión 2 del axioma de completitud) Sea A un subconjunto no vacío de IR, el cual es acotado superiormente. Entonces existe el extremo superior de A.

Similarmente podemos hablar de acotación inferior, y se demuestra, usando el axioma del extremo superior, que todo conjunto B no vacío y acotado inferiormente, tiene una cota inferior máxima. Tal cota se llama en extremo inferior (o ínfimo) del conjunto B, y se denota por inf B (ver ejercicio 15) .

Ejemplo 2.2.6   Para A = [1, 3] $\cup$ {7} tenemos que α = 7 es cota superior. Además, si b es cota superior de A, como 7 $\in$ A debemos tener 7 $\leq$ b. Esto demuestra que sup A = 7.

Ejemplo 2.2.7   Para A = [0, 1[, tenemos que α = 1 es cota superior de A. Además, si b es cota superior de A, debemos tener b $\geq$ 1. En efecto, primero observemos que b $\geq \frac{1}{2}$, pues $\frac{1}{2} \in$ A. Luego, si se tuviera b < 1, entonces x = (b + 1)/2 sería un elemento de A, y además x > b, contradiciendo el hecho que b es cota superior de A. Esto demuestra que sup A = 1.

Nota: El ejemplo anterior demuestra que sup A no necesariamente es un elemento de A. Además, el argumento del ejemplo 2.2.6 demuestra que si una cota superior de A pertenece a dicho conjunto, entonces esa cota es el supremo. En tal caso suele usarse también la palabra *máximo,* ***y escribir max A en vez de sup A.***

La siguiente caracterización del supremo suele ser útil:

Teorema 1   Sea A $\subset$ IR, acotado superiormente y no vacío, y sea $\alpha \in$ IR. Entonces α = sup A si y solo si satisface:

(a)
x $\leq \alpha$, para todo x $\in$ A.

(b)
Para todo ε > 0, existe x $\in$ A tal que α - ε < x.

Prueba

Supongamos primero que α = sup A. Entonces α es cota superior, lo que significa que satisface (a). Luego, dado ε > 0 tenemos $\alpha - \varepsilon < \alpha$, así que $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior de A, y consecuentemente debe existir x $\in$ A tal que x > $\alpha - \varepsilon$. Esto demuestra la propiedad (b).

Recíprocamente, supongamos que las propiedades (a) y (b) se cumplen y probemos que α = sup A. Primero α es cota superior por la propiedad (a). Ahora sea b una cota superior de A. Si b < α, entonces tomando $\varepsilon = \alpha$ - b > 0 tenemos por hipótesis que existe x $\in$ A tal que x > $\alpha - \varepsilon$ = b, lo cual contradice el hecho que b es cota superior de A. Consecuentemente b $\geq \alpha$, demostrando así que α es la menor cota superior.

El axioma del extremo superior puede usarse para demostrar algunas propiedades básicas de los números reales. Una de ellas es el principio de Arquímedes, que demostraremos a manera de ejemplo:

Lema 2.2.1 (Versión 1 del principio de Arquímedes)   IN no es acotado superiormente.

Prueba

En efecto, si IN fuera acotado, por el axioma del extremo superior tendría supremo α = sup IN $\in$ IR. Pero entonces, por el teorema anterior existiría n $\in$ IN tal que n > α - 1, de donde n + 1 > α. Como n + 1 $\in$ IN y α es cota superior, esto es contradictorio.

Corolario 1 (Versión 2 del principio de Arquímedes) ***Para $x, y \in IR$, con $y > 0$, existe $n \in IN$ tal que $ny > x$.***

Prueba

Supongamos que el resultado falso. Entonces existen $x \in IR$, $y \in IR^+$, tales que $x \geq ny$ para todo $n \in IN$. En otras palabras, xy^{-1} es una cota superior de IN, lo cual es absurdo debido al lema anterior.

Inducción y buen orden

Una manera de iniciar el estudio de los números naturales es comenzar con los axiomas de Peano, que incluyen el principio de inducción. Si se está familiarizado con los números reales, se puede definir el conjunto IN de los números naturales como el menor subconjunto inductivo de IR. Aquí nos contentaremos con enunciar el principio de inducción como axioma.

Definición 2.3.1 Un conjunto $A \subseteq IR$ se llama inductivo si satisface:

(a)
$0 \in A$.

(b)
Para todo $n \in A$ se tiene $n + 1 \in A$.

Por ejemplo, $A = [0, \infty[$ es inductivo, lo mismo que IN y IZ. El conjunto

$$B = \{ n \in IN : 2^n \geq n^2 \}$$

no es inductivo, pues contiene a $n = 2$, pero no contiene a $2 + 1 = 3$.

Principio de inducción (Versión 1) IN es el menor subconjunto inductivo de IR.

Así, si $A \subseteq IN$ es inductivo, debe tenerse $A = IN$. Podemos entonces escribir el principio en la forma alternativa:

Principio de inducción (Versión 2) Si $A \subseteq IN$ satisface la propiedades (a) y (b), entonces $A = IN$.

Ejemplo 2.3.1 Demostrar que $2^n \geq n + 1$, para todo $n \in IN$.

Definimos el conjunto

$$A := \{ n \in IN : 2^n \geq n + 1 \}.$$

Observe que $0 \in A$, pues $2^0 = 1 \geq 0 + 1$.

Ahora, si $n \in A$ tenemos $2^n \geq n + 1$. Entonces

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n + 1) = 2n + 2 \geq n + 2,$$

así que $n + 1 \in A$. Esto demuestra que A es inductivo, y por el principio de inducción se concluye que $A = IN$. La desigualdad es válida entonces para todo $n \in IN$.

Ejemplo 2.3.2 Demostrar que para todo $n \in IN$ se tiene

$$0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Se trata de demostrar que el conjunto

$$A := \left\{ n \in IN : 0 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

es igual a IIN, para lo cual basta demostrar que es inductivo.

Para $n = 0$, la suma del lado izquierdo solo tiene un término, y es igual a 0, mientras que el lado derecho es $\frac{0(0+1)}{2} = 0$. Entonces $0 \in A$.

Si $n \in A$, entonces tenemos que

$$0 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

y debemos demostrar que $n + 1 \in A$. Veamos:

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \cdots + (n+1) &= (0 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

de donde $n + 1 \in A$. Por el principio de inducción concluimos que $A = IN$.

Nota: En la práctica no se scodtumbra definir el conjunto A explícitamente, sino que se demuestra la propiedad planteada para n = 0, y luego se demuestra que si se cumple para n, debe cumplirse para n + 1.

Ejemplo 2.3.3 Demostrar que $n^3 + 5n$ es divisible por 6, para todo $n \in IN$.

En efecto, para $n = 0$ tenemos $n^3 + 5n = 0$, el cual es divisible por 6.

Si $n^3 + 5n$ es divisible por 6, tenemos $n^3 + 5n = 6k$, para algún $k \in IN$. Luego

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = \left(n^3 + 5n\right) + 3n^2 + 3n + 6$$

$$= 6k + 3n(n+1) + 6$$
$$= 6(k+1) + 3n(n+1).$$

Como $n(n+1)$ es siempre par (¿por qué?), tenemos que $3n(n+1)$ es múltiplo de 6, y consecuentemente $(n+1)^3 + 5(n+1)$ lo es.

El principio de inducción también es aplicable a propiedades que son válidas a partir de cierto valor de n. Veamos el siguiente resultado, que llamaremos **inducción truncada.**

Lema 2.3.1 (Inducción truncada) Sea $A \subseteq IN$, y sea $N \in IN$ tales que

(a) $N \in A$.

(b) Para todo $n \in A$ tal que $n \geq N$, se tiene $n + 1 \in A$.

Entonces A contiene todos los naturales a partir de N. Esto es:

$$\{n \in IN : n \geq N\} \subseteq A.$$

Prueba:

Si N = 0, el resultado es precisamente el principio de inducción.

Si N > 0 considere el conjunto

$$B = A \cup \{0, 1, ..., N - 1\}.$$

Entonces claramente B es inductivo, y por el principio de inducción se concluye que B = IN. Ahora, dado $n \geq N$, tenemos que $n \in B$, y $n \notin \{0, 1, ..., N - 1\}$, de donde concluimos que $n \in A$.

Veamos algunos ejemplos donde se aplica este resultado:

Ejemplo 2.3.4 Demostrar que $n + 3 < 2^n$, para todo $n \geq 3$.

Note que en este caso la desigualdad es falsa para $n = 0, 1, 2$. Para $n = 3$ sí es válida pues tenemos $3 + 3 = 6 < 2^3 = 8$. Ahora, si se cumple para cierto $n \geq 3$, tenemos $n + 3 < 2^n$, y luego

$$(n + 1) + 3 = (n + 3) + 1 < 2^n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Entonces también se cumple para $n + 1$. Luego, por inducción truncada la desigualdad es válida para todo $n \geq 3$.

Ejemplo 2.3.5 Demostrar que $n^2 \leq 2^n$, para todo $n \geq 4$.

Note que aunque la desigualdad es válida para $n = 1$ y $n = 2$, no lo es para $n = 3$. Para $n = 4$ tenemos $4^2 = 16 = 2^4$, así que se cumple $4^2 \leq 2^4$.

Ahora supongamos que se cumple para algún $n \geq 4$, esto es $n^2 \leq 2^n$. Entonces

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2.$$

Para demostrar la desigualdad para $n + 1$ basta con demostrar que $2n^2 \geq (n + 1)^2$, lo cual es equivalente a $n^2 - 2n - 1 \geq 0$. Esto es cierto para $n \geq 4$, pues

$$n^2 - 2n - 1 = n(n - 2) - 1 \geq 4 \cdot 2 - 1 = 7 > 0.$$

Esto demuestra entonces que $2n^2 \geq (n + 1)^2$, y luego

$$2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n + 1)^2.$$

En algunos ejemplos, al demostrar que $n + 1 \in A$, se debe hacer uso no solo del hecho que $n \in A$, sino también de que $n - 1 \in A$, o en general de que $k \in A$ para $k \leq n$. El siguiente resultado permite hacer este tipo de razonamientos.

Lema 2.3.2 (Inducción completa) Sea $A \subset IN$ que satisface

(a)
$0 \in A$.

(b)
Si $k \in A$ para todo $k \leq n$, entonces $n + 1 \in A$.

Entonces $A = IN$.

Prueba

Defina el conjunto

$$B = \{ n \in IN : k \in A \text{ para todo } k \leq n \}.$$

Entonces $B \subseteq A$, y por la propiedad (a) tenemos que $0 \in B$. Por otro lado, supongamos que $n \in B$. Entonces por definición tenemos que $k \in A$ para todo $k \leq n$, y por la propiedad (b) se tiene $n + 1 \in A$. Consecuentemente

$$k \in A \text{ para todo } k \leq n + 1,$$

lo que significa $n + 1 \in B$. Por el principio de inducción se sigue que $B = IN$. Finalmente tenemos $IN = B \subseteq A$, y por lo tanto $A = IN$.

Otra propiedad importante de los números naturales es el principio del buen orden . Como veremos, este principio es equivalente al principio de inducción. Para establecerlo necesitamos primero la siguiente definición.

Definición 2.3.2 Dado $A \subset IN$, decimos que n_0 es el primer elemento de A si satisface:

1. **$n_0 \in A$.**

2. $n_0 \leq n, \forall n \in A$.

El lector puede demostrar que de existir el primer elemento, este debe ser único. Note que 0 es el primer elemento de IN. Dado $A \subseteq IN$, si $0 \in A$ se sigue inmediatamente que 0 es el primer elemento de A.

Lema 2.3.3 (Principio del buen orden) **Si *A* es un subconjunto no vacío de *IN*, entonces *A* tiene primer elemento.**

Prueba

Suponga que A no tiene primer elemento, y defina

$$B = IN - A = \{ n \in IN : n \notin A \}.$$

Tenemos que $0 \in B$, pues de lo contrario 0 sería el primer elemento de A. Ahora, si $k \in B$ para todo $k \leq n$, entonces $n + 1 \in B$, pues de lo contrario $n + 1$ sería el primer elemento de A.

Por el principio de inducción completa se sigue que B = IN, y consecuentemente $A = \emptyset$. Como esto contradice la hipótesis, A debe tener primer elemento.

Como una aplicación de este hecho, demostremos que todo número real tiene parte entera.

Ejemplo 2.3.6 (Parte entera) Sea $x \in IR$. Entonces existe $m \in IZ$ tal que

$$m \leq x < m + 1.$$

En efecto, sea $x > 0$. Por arquimedianidad, existe $n \in IN$ tal que $n > x$. Esto quiere decir que el conjunto

$$A = \{ k \in IN : k > x \}$$

es no vacío, y por lo tanto tiene primer elemento, el cual llamaremos n_0. Entonces tenemos que $n_0 \in A$ y $n_0 - 1 \notin A$, lo cual implica

$$n_0 - 1 \leq x < n_0.$$

Tomando $m = n_0 - 1$ obtenemos el resultado.

Si $x < 0$, se aplica lo anterior a $-x$ y luego se multiplica por -1.

Nota: El lector puede convencerse de que m es único para x. Tal m se llama la parte entera de x, y se denota $m = [x]$.

Ejemplo 2.3.7 (Algoritmo de la división) Para a y b naturales, con $b > 0$, existen q y r tales que

$$a = bq + r, \ \ 0 \leq r < b.$$

La idea es comenzar en el origen, ``pegando brincos'' de longitud b, hasta caer a la derecha de a. Entonces q es el mayor natural que cumple $qb \leq a$. Basta entonces con tomar $q = \left[\frac{a}{b} \right]$. Tenemos

$$q \le \frac{a}{b} < q + 1,$$

lo cual implica $qb \le a < qb + b$. Luego $0 \le a - bq < b$, y tomamos $r = a - bq$.

Visto de otra forma, $q = k_0 - 1$, donde k_0 es el primer elemento del conjunto

$$A := \{ k \in IN : kb > a \}.$$

Por ejemplo, si $a = 145$ y $b = 15$, tenemos $a = b \cdot 9 + 10$, así que $q = 9$ y $r = 10$.

Subsections

- *Definiciones por recurrencia*

Definiciones por recurrencia

Muchas veces, para definir una función $f : IN \to A$, se hace uso implícito del principio de inducción. Por ejemplo, cuando se define

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \text{ (} n \text{ veces),}$$

realmente se está pensando en la definición: $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Esto define a^0, y asumiendo que a^n está definido, permite definir a^{n+1}. El principio de inducción garantiza que esta es una buena definición de la función

$$f : IN \to IR, \ f(n) = a^n.$$

En lo que sigue hacemos uso de este principio.

Ejemplo 2.3.8 (El factorial) Se define $0! = 1$, y para $n \in IN$, $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$. Tenemos entonces $1! = 1 \cdot 0! = 1$, $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, y en general $n! = n \cdot (n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Ejemplo 2.3.9 Dada una función $f : IN \to IR$, podemos definir la suma

$$S_n = f(0) + \ldots + f(n)$$

inductivamente así:

$$S_0 = f(0), \ S_{n+1} = S_n + f(n+1).$$

A veces se usa la notación $a_k = f(k)$, obteniendo

$$S_n = a_0 + \ldots + a_n,$$

que también se denota por

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Note que por definición se tiene

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

Si se comienza en 1, se denota

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + ... + a_n.$$

Ejemplo 2.3.10 Un caso particular del ejemplo anterior es la suma

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

que estudiamos anteriormente.

Ejemplo 2.3.11 Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1, \quad \forall n \in IN.$$

Para $n = 0$ la suma del lado izquierdo es $0 \cdot 0! = 0$, mientras que al lado derecho tenemos $(0 + 1)! - 1 = 0$. Entonces la igualdad es válida para $n = 0$.

Supongamos que la igualdad es válida para n, y probémosla para $n + 1$. Tenemos

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \cdot k! = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)!,$$

y por hipótesis de inducción se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k \cdot k! &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (1 + n + 1)(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Esto demuestra la igualdad para $n + 1$, y por el principio de inducción se sigue que es válida para todo $n \in IN$.

Ejemplo 2.3.12 Demostrar que $2^n < n!$, para todo $n \geq 4$.

Para $n = 4$ tenemos $2^4 = 16 < 24 = 4!$. Ahora supongamos que $2^n < n!$ para algún $n \geq 4$. Entonces

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!,$$

con lo que $n + 1$ también satisface la desigualdad. El principio de inducción se encarga del resto.

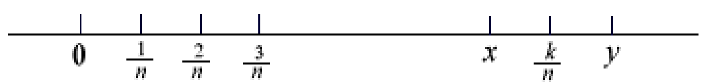
2.4 Densidad de Q

Los resultados de la sección anterior pueden ser usados para demostrar una serie de propiedades interesantes de los números racionales e irracionales. Comencemos con la densidad de Q:

Teorema 2 **Dados $x, y \in IR$, con $x < y$, existe un racional r tal que $x < r < y$.**

Prueba:

Primero tomemos el caso $0 \leq x < y$. La idea es tomar un n suficientemente grande, y comenzar a ``pegar brincos'' de longitud $\frac{1}{n}$, partiendo del origen, hasta caer en el intervalo $]x, y[$. Para asegurarnos de no brincarnos completamente dicho intervalo, debe tenerse $\frac{1}{n} < y - x$.



Densidad de Q

Más precisamente, usamos la arquimedianidad de IR para concluir que existe $n \in IN$ tal que $n > (y - x)^{-1}$, y consecuentemente $\frac{1}{n} < y - x$. Luego consideramos el conjunto

$$A = \{ j \in IN : j > nx \}.$$

Otra vez por arquimedianidad, A no es vacío, y por el principio del buen orden existe el primer elemento de A, que denotaremos por k. En particular $k \in A$ y $k - 1 \notin A$, lo que significa

$$\frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n}.$$

De la primera desigualdad se sigue que $\frac{k}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$, y consecuentemente $r := \frac{k}{n}$ satisface

$$x < r < y.$$

En el caso $x < 0 < y$, tenemos que $r = 0$ es el racional buscado.

En el caso $x < y \leq 0$, tenemos $0 \leq -y < -x$, y por lo que acabamos de demostrar existe $r \in IQ$ tal que $-y < r < -x$. Luego $x < -r < y$, y como $-r \in IQ$, el resultado queda demostrado.

En los ejercicios se le pide al lector demostrar que el conjunto de los números irracionales es también denso en IR. El teorema anterior es de vital importancia en análisis. Por ejemplo, para definir rigurosamente ciertas funciones, se define primero para los racionales y luego se extiende a todos los reales utilizando la densidad de IQ. Esta idea la usaremos más adelante para definir la función exponencial.

Ejemplo 2.4.1 Considere el conjunto

$$A = \{ x \in IQ : x < 1 \}.$$

Notemos que $\alpha = 1$ es una cota superior. Por otro lado, dado $b < 1$, la densidad de IQ permite concluir que existe $r \in IQ$ tal que $b < r < 1$, de donde $r \in A$ y $r > b$. Esto demuestra que b no puede ser cota superior de A, y por lo tanto $\sup A = 1$.

Ejemplo 2.4.2 El conjunto $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in IIN \right\}$ es acotado superiormente. Es un buen ejercicio demostrar que $\sup A = 1$.

Existencia de raíces

El lector probablememente sabe muy bien que dado $a > 0$, $\sqrt{a}$ es un número real positivo tal que $(\sqrt{a})^2 = a$.

En esta sección usamos la completitud de IR para darle rigor a esta definición. En otras palabras, demostraremos que la función $f : IR^+ \to IR^+$, definida por $f(x) = x^2$, es sobreyectiva. Primero, y para enfatizar la diferencia entre IQ y IR, vamos a demostrar que esto no es posible hacerlo en IQ. Específicamente, vamos a demostrar que:

Lema 2.5.1 No existe $r \in IQ$ tal que $r^2 = 2$.

Prueba:

En efecto, supongamos que sí existe tal r. Entonces se puede escribir

$$r = \frac{m}{n},$$

donde m, n son naturales, y al menos uno de ellos es impar. Se sigue entonces que $m^2 = 2n^2$, y consecuentemente m^2 es par, lo que implica que m también es par (¿por qué?), esto es $m = 2k$ para algún $k \in IZ$. Luego

$$2n^2 = m^2 = 4k^2,$$

y obtenemos que n^2 también es par, con lo cual n es par. Como esto es contradictorio, no existe tal r.

Este hecho, junto con el lema siguiente, permite concluir que existe un número real $\sqrt{2} \in II$.

Lema 2.5.2 Dado $a > 0$, existe un número $\alpha > 0$ tal que $\alpha^2 = a$. A tal α se le llama la raíz cuadrada de a, y se le denota $\alpha = \sqrt{a}$.

Prueba:

Defina los conjuntos

$$A = \{ x \geq 0 : x^2 < a \},\ B = \{ y > 0 : y^2 > a \}.$$

Como $a > 0$ tenemos que $0 \in A$, así que $A \neq \emptyset$. Además, como $(a + 1)^2 > a + 1 > a$, tenemos $B \neq \emptyset$. La igualdad

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

demuestra que para $x, y > 0$ se tiene

$$x > y \Leftrightarrow x^2 > y^2.$$

Luego, dados $x \in A$ y $y \in B$ se tiene $x^2 < a < y^2$, con lo que $x < y$. Por la completitud de IR existe $\alpha \in$ IR tal que $x \leq \alpha \leq y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Para demostrar que $\alpha^2 = a$, debemos descartar las posibilidades $\alpha^2 > a$ y $\alpha^2 < a$. Veamos:

1.

Si $\alpha^2 < a$, tome $0 < \varepsilon < 1$. Note que $\varepsilon^2 < \varepsilon$, y entonces

$$(\alpha + \varepsilon)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 < \alpha^2 + (2\alpha + 1)\varepsilon.$$

Si además $\varepsilon < (a - \alpha^2)/(2\alpha + 1)$, se sigue que

$$(\alpha + \varepsilon)^2 < \alpha^2 + (2\alpha + 1)\varepsilon < \alpha^2 + (a - \alpha^2) = a.$$

Esto es, $\alpha + \varepsilon \in A$, contradiciendo el hecho que α es cota superior de A.

2.

Si $\alpha^2 > a$, note que

$$(\alpha - \varepsilon)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 > \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon.$$

Si $0 < \varepsilon < (\alpha^2 - a)/2\alpha$, obtenemos

$$(\alpha - \varepsilon)^2 > \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon > \alpha^2 - (\alpha^2 - a) = a.$$

Pero entonces $\alpha - \varepsilon \in B$, lo que contradice el hecho que α es cota inferior del conjunto B.

Un argumento similar al anterior se usa para demostrar que dados $a > 0$, $n \in$ IN, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha^n = a$. Tal α se llama la raíz n - ésima de a, y se denota $\alpha = \sqrt[n]{a}$.

Un barniz de sucesiones

Una sucesión numérica es una función $a : IN \to IR$. Es común denotar a_n en vez de $a(n)$, y pensar en la sucesión como un ``conjunto ordenado'' (o ∞ -étupla)

$$(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...),$$

de ahí el nombre sucesión, pues cada número tiene sucesor, y aparte de a_0, todos tienen antecesor. A a_n se le llama el n - ésimo término de la sucesión. La sucesión a se denota por (a_n) o $(a_n)_{n \in IN}$.

Ejemplo 2.6.1 Si $a_n = 1$ para cada n, tenemos $(a_n) = (1, 1, ...)$.

Ejemplo 2.6.2 Si $a_n = (-1)^n$ para cada n, tenemos $(a_n) = (1, -1, 1, -1, ...)$.

Ejemplo 2.6.3 Para $a_n = (1 + (-1)^n)\frac{n}{2}$, para cada n, entonces

$$(a_n) = (0, 0, 2, 0, 4, ..., 0, 2k, 0, ...).$$

De la misma forma se pueden considerar sucesiones definidas a partir de cierto n. Así, $(a_n)_{n \geq k}$ denotará la sucesión $a : \{k, k+1, ...\} \to IR$.

Ejemplo 2.6.4 Si $a_n = \frac{1}{n}$ para $n \geq 1$, se obtiene $(a_n)_{n \geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right)$.

Definición 2.6.1 La sucesión (a_n) se llama creciente si $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ....$ Nótese que esto es equivalente a tener

$$a_n \leq a_m, \text{ para } n \leq m.$$

Si la desigualdad es estricta, la sucesión se llama estrictamente creciente. Similarmente, (a_n) se llama decreciente si $a_n \geq a_m$ para $n \leq m$.

Ejemplo 2.6.5 La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right)$ es decreciente estrictamente.

Ejemplo 2.6.6 La sucesión constante $(c)_{n \in IN} = (c, c, c, ...)$ es creciente y decreciente.

Ejemplo 2.6.7 La sucesión $([\frac{n}{2}])_{n \in IN} = (0, 0, 1, 1, 2, 2, ...)$ es creciente, pero no estrictamente creciente.

Ejemplo 2.6.8 La sucesión $(1, -1, 1, -1, ...) = ((-1)^n)_{n \in IN}$ no es creciente ni decreciente.

La sucesión $(a_n)_{n \in IN}$ se llama acotada superiormente, si existe $b \in IR$ tal que $a_n \leq b, \forall\ n \in IN$. Equivalentemente, (a_n) es acotada superiormente si su rango

$$R = \{a_n : n \in IN\}$$

es un conjunto acotado superiormente. Similarmente, (a_n) se llama acotada inferiormente si su rango es

acotado inferiormente. La sucesión (a_n) se llama acotada si es acotada superior e inferiormente (esto es, si su rango es acotado). Nótese que $(a_n)_{n \in IN}$ es acotada si, y solo si, existe $T > 0$ tal que $|a_n| \leq T, \forall n \in IN$.

Es un buen ejercicio demostrar este hecho con detalle.

Ejemplo 2.6.9 Las sucesiones $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$, $((-1)^n)_{n \in IN}$ y $(c)_{n \in IN}$ son acotadas. En efecto, en los dos primeros casos se puede tomar $T = 1$, y en el tercer caso $T = |c|$.

Ejemplo 2.6.10 La sucesión $([\frac{n}{2}])_{n \in IN}$ es acotada inferiormente, pero no superiormente. En efecto, $\left[\frac{n}{2}\right] \geq 0$, pero no existe b tal que $\left[\frac{n}{2}\right] \leq b$ para todo $n \in IN$, pues si así lo fuera, $2b + 2$ sería cota superior de IN.

Ejemplo 2.6.11 La sucesión $((-1)^n n)_{n \in IN}$ no es acotada ni superior ni inferiormente. Se invita al lector a verificar este hecho con todo detalle.

Subsections

- Convergencia

Convergencia

Cuando los elementos a_n se acercan a cierto número real l, conforme n se hace grande, decimos que la sucesión (a_n) converge a l. Para precisar esto mejor, tomamos un intervalo $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$. Si los a_n se acercan a l, debe tenerse $a_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, para n suficientemente grande. Esto justifica la siguiente definición.

Definición 2.6.2 Decimos que la sucesión (a_n) converge a $l \in IR$ si:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in IN$ tal que

$$|a_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq N.$$

En tal caso decimos que la sucesión (a_n) es convergente, y que su límite es l. Escribimos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l.$$

También se usa la notación $a_n \to l$.

Si no existe tal l, decimos que (a_n) diverge.

Ejemplo 2.6.12 La sucesión constante $(c) = (c, c, c, \ldots)$ converge a c. En efecto, como $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$ para cada n, la definición de convergencia se cumple trivialmente.

Ejemplo 2.6.13 La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge a $l = 0$.

Para ver esto, tomemos $\varepsilon > 0$. Debemos hallar N de manera que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto es equivalente a tener $n > \frac{1}{\varepsilon}$, para $n \geq N$. Entonces basta tomar $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, veamos:

$$n \geq N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow | a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

Ejemplo 2.6.14 La sucesión (a_n) definida por $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ converge a $l = 1$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, veamos qué necesitamos para que $| a_n - 1 | < \varepsilon$:

$$| a_n - 1 | < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{n^2-1}{n^2+1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n^2+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n^2 + 1.$$

Para que esto ocurra basta que $n^2 > \frac{2}{\varepsilon}$, esto es $n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$. Entonces basta con tomar $N = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right] + 1$.

Ejemplo 2.6.15 La sucesión $((- 1)^n)$ diverge. Para demostrar esto, supongamos lo contrario, y denotemos su límite por l. Tomando $\varepsilon = 1$ tendríamos la existencia de N tal que $| (- 1)^n - l | < 1$, para todo $n \geq N$. Pero para n par obtenemos $l > 0$, y para n impar obtenemos $l < 0$, lo cual es contradictorio.

El siguiente lema nos permite hablar de ``el límite'' de una sucesión.

Lema 2.6.1 Si (a_n) converge, su límite es único.

Prueba

Supongamos que l_1 y l_2 son límites de (a_n). Sea $\varepsilon > 0$. Por definición existen N_1 y N_2 tales que

$| a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\ n \geq N_1,$

$| a_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\ n \geq N_2.$

Tomando n = max{N_1, N_2} se obtiene:

$$| l_1 - l_2| = | l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq | l_1 - a_n| + | a_n - l_2| < \varepsilon .$$

Concluimos entonces que $| l_1 - l_2| < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, con lo cual $l_1 = l_2$.

Otro resultado importante que resulta directo de la definición de lí mite es el siguiente:

Lema 2.6.2 Toda sucesión convergente es acotada.

Prueba

Consideremos una sucesión convergente (a_n), y sea l su límite. Entonces tomando $\varepsilon = 1$, existe $N \in IN$ tal que

$$| a_n| - | l| \leq | a_n - l| < 1, \forall\ n \geq N.$$

Definiendo

$$M = \max\{|a_1|,\ldots,|a_{N-1}|,|l|+1\},$$

obtenemos $|a_n| \leq M$ *para todo* $n \in IN$.

Nótese que el recíproco es falso, pues por ejemplo la sucesión $((-1)^n)$ *es acotada y no convergente.*

La demostración del siguiente lema la dejaremos como ejercicio:

Lema 2.6.3 **Supongamos que** (a_n) **y** (b_n) **son sucesiones convergentes, tales que para algún** $N \in IN$ **se tiene**

$$a_n \leq b_n, \forall\, n \geq N.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

En particular, si para cada n se tiene $a_n \geq 0$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$.

El siguiente resultado permite el cálculo y análisis de la convergencia de ciertas sucesiones, con base en otras más simples. Este resultado será central en la construcción de la función exponencial que expondremos luego.

Teorema 3 (Ley del emparedado) **Supongamos que las sucesiones** (b_n) **y** (c_n) **son convergentes a** l**, y que existe** n_0 **tal que** $b_n \leq a_n \leq c_n, \forall\, n \geq n_0$**. Entonces** (a_n) **también converge a** l**.**

Prueba

Dado $\varepsilon > 0$, *existe* $n_1 \in IN$ *tal que* $|b_n - l| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_1$, *y existe* n_2 *tal que* $|c_n - l| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_2$. *Definiendo* $N = max\{n_0, n_1, n_2\}$ *tenemos*

$$l - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < l + \varepsilon, \forall\, n \geq N.$$

Por lo tanto (a_n) *converge a* l.

Ejemplo 2.6.16 **La sucesión** $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ **converge a 0, pues** $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}, \forall\, n \in IN$.

Ejemplo 2.6.17 **Considere la sucesión** $a_n = \sqrt[n]{2}$**. Tomando** $\varepsilon_n = \sqrt[n]{2} - 1 > 0$**, tenemos por la desigualdad de Bernoulli (ejercicio 3) que**

$$2 = \left(\sqrt[n]{2}\right)^n = (1 + \varepsilon_n)^n \geq 1 + n\varepsilon_n.$$

Esto muestra que

$$0 < \varepsilon_n \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

Por el teorema del emparedado se sigue que $\varepsilon_n \to 0$**, y consecuentemente** $a_n = \sqrt[n]{2} \to 1$**.**

Si $a_n \to l \neq 0$, entonces eventualmente debe tenerse $a_n \neq 0$. Mejor aún, a_n se mantiene lejos de cero, para n grande. El siguiente lema expresa este hecho, de gran utilidad teórica.

Lema 2.6.4 Supongamos que $a_n \to l \neq 0$. Entonces existe n_0 tal que para cada $n \geq n_0$ se tiene $|a_n| > \frac{1}{2}|l|$.

Prueba

Basta tomar $\varepsilon = \frac{1}{2}|l|$, el cual es positivo, y aplicar la definición de convergencia. Obtenemos la existencia de n_0 tal que

$$l - \frac{1}{2}|l| < a_n < l + \frac{1}{2}|l|, \forall n \geq n_0.$$

Si $l > 0$ esto implica $a_n > l - \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}l$. si por el contrario $l < 0$, se obtiene $a_n < l + \frac{1}{2}(-l) = \frac{1}{2}l$.

El cálculo de límites de sucesiones, se simplifica enormemente con el uso del siguiente teorema:

Teorema 4 Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes, con $a_n \to a$ y $b_n \to b$, y sea $c \in IR$. Entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n + b_n) = c \cdot a + b$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ **(ley del producto).**
4. **Si $b_n \neq 0$ para todo n, y si $b \neq 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (ley del cociente).**

Prueba

1.

Dado $\varepsilon > 0$, aplicamos la definición de convergencia de (a_n), con $\frac{\varepsilon}{|c|+1}$ en lugar de ε, obteniendo que existe N tal que $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{|c|+1}$, para $n \geq N$. Luego

$$|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - l| \leq |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|+1} < \varepsilon, \forall n \geq N.$$

2.

Dado $\varepsilon > 0$, existen n_0 y n_1 tales que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0; \; |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_1.$$

Tomando $N = \max(n_0, n_1)$ obtenemos que

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon, \forall n \geq N.$$

Esto demuestra que $a_n + b_n \to a + b$. Además, por la parte 1 tenemos que $c \cdot a_n \to c \cdot a$, y por lo que acabamos de demostrar se obtiene que $c \cdot a_n + b_n \to c \cdot a + b$.

3.

Como (b_n) es convergente, se sigue que es acotada, y entonces existe $T > 0$ tal que $|b_n| \leq T$, $\forall\ n \in IN$. Además

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|,$$

y por lo tanto

$$|a_n b_n - ab| \leq T|a_n - a| + |a||b_n - b|.$$

Como $|a_n - a| \to 0$ y $|b_n - b| \to 0$, las propiedades anteriores permiten concluir que

$$T|a_n - a| + |a||b_n - b| \to 0.$$

Por el teorema del emparedado concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n b_n - ab| = 0.$$

3.

Por el lema anterior, existe n_0 tal que $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$, $\forall n \geq n_0$. Luego

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \frac{2}{b^2}|b_n - b|,\ \forall n \geq n_0.$$

Por la propiedad 1 y el teorema del emparedado concluimos que

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \to 0.$$

Combinando con la propiedad 2, obtenemos

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Ejemplo 2.6.18 Sea $a_n = \frac{1}{n^2}$. Como $\frac{1}{n} \to 0$, tenemos que $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$, por la ley del producto.

Ejemplo 2.6.19 Si $a_n = 1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}$ tenemos que $a_n \to 1$, por el ejemplo anterior, y las propiedades 1, 2 y 4.

Ejemplo 2.6.20 Si $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ tenemos $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0$.

Ejemplo 2.6.21 Sea $a_n = \frac{n^2+3n-5}{2n^2+40n+6}$. Factorizando n^2 tenemos

$$a_n = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{40}{n}+\frac{6}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{2+\frac{40}{n}+\frac{6}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2.6.22 **Considere la sucesión $a_n = \sqrt[n]{a}$, donde $a > 1$ es fijo. Tomando $\varepsilon_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$, tenemos por la desigualdad de Bernoulli (ejercicio 3) que**

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (1+\varepsilon_n)^n \geq 1 + n\varepsilon_n > n\varepsilon_n$$

Esto demuestra que

$$0 < \varepsilon_n \leq \frac{a}{n}, \text{ para cada } n \geq 1.$$

Por la propiedad 1 del teorema anterior se tiene que $\frac{a}{n} \rightarrow 0$, y por el teorema del emparedado se concluye que $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Consecuentemente, por la propiedad 2 del teorema anterior se concluye:

$$a_n = \sqrt[n]{a} = 1 + \varepsilon_n \rightarrow 1.$$

Ejemplo 2.6.23 **Si $a_n = \frac{n+\cos n}{3n+1}$ tenemos**

$$\frac{n-1}{3n+1} \leq a_n \leq \frac{n+1}{3n+1}.$$

Además

$$\frac{n+1}{3n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{3}, \qquad \frac{n-1}{3n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Por el teorema del emparedado obtenemos que $a_n \rightarrow \frac{1}{3}$.

El siguiente teorema será la base en la construcción de la función exponencial que haremos luego.

Teorema 5 (Weierstrass) **Toda sucesión monótona y acotada es convergente.**

Prueba

Sea (a_n) acotada y creciente. Sea $l = \sup\{a_n : n \in IN\}$, y sea $\varepsilon > 0$. Por definición de supremo (o el teorema 1) existe $N \in IN$ tal que $a_N > l - \varepsilon$. Como (a_n) es creciente se sigue que

$$l - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq l, \forall n \geq N.$$

Esto demuestra que $a_n \rightarrow l$. El caso decreciente se trata de manera similar.

Ejemplo 2.6.24 **Considere la sucesión dada recurrentemente por:**

$$a_0 = \sqrt{2},\ a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \text{ para } n \geq 1.$$

Los términos de esta sucesión son

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

Veremos que (a_n) es creciente y acotada superiormente. Para esto probaremos, usando el principio de inducción, que para todo $n \in IN$ se tiene $a_n \leq a_{n+1} \leq 2$.

- **Para $n = 0$: $a_0 = \sqrt{2} \leq a_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \leq \sqrt{2+2} = 2$.**

- **Paso inductivo: Si $a_n \leq a_{n+1} \leq 2$, se sigue que $2 + a_n \leq 2 + a_{n+1} \leq 2 + 2 = 4$, y entonces**

$$\sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+a_{n+1}} \leq 2,$$

esto es $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 2$.

Luego, por el teorema de Weierstrass tenemos que existe $l \in IR$ tal que $a_n \to l$. Pero por las propiedades de los límites se debe tener

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+l},$$

y entonces $l^2 - l - 2 = 0$. Esto demuestra que $l = -1$ ó $l = 2$, pero como l es positivo, se concluye que $l = 2$. Hemos demostrado que

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 2.$$

Note que el teorema de Weierstrass es imprescindible en este ejemplo, ya que la manipulación para hallar l solo está justificada después de conocer su existencia.

Expansiones decimales

Desde temprana edad hemos aprendido que todo número real x tiene expansión decimal $c_0, c_1c_2\ldots$, y que esto significa, en el caso que x sea positivo,

$$x = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \ldots$$

Los dígitos $c_1, c_2, \ldots$ son números naturales entre 0 y 9, mientras que c_0 es un número entero. Por ejemplo,

$$\tfrac{4}{3} = 1,333\ldots, \quad \frac{-7}{2} = -3,500\ldots, \quad \pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\ldots$$

Consideremos primero un número real $x \in [0, 1[$. Vamos a demostrar que efectivamente existe una sucesión de

naturales (c_n), *con* $c_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, *tales que*

$$\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n}{10^n} \le x < \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n+1}{10^n}.$$

En tal caso decimos que x tiene expansión decimal

$$\mathbf{0,}\ c_1c_2c_3\ldots.$$

Para empezar, debemos tener

$$\frac{c_1}{10} \le x < \frac{c_1+1}{10},$$

o lo que es lo mismo, $c_1 \le 10x < c_1 + 1$***. Debemos definir entonces*** $c_1 := [10x]$ ***(la parte entera de 10x). Nótese que esta es la única opción. Luego, habiendo definido*** $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$***, debemos definir*** c_n ***tal que***

$$\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n}{10^n} \le x < \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n+1}{10^n}.$$

Esto es equivalente a

$$\frac{c_n}{10^n} \le x - \left(\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{10^{n-1}}\right) < \frac{c_n+1}{10^n},$$

lo que significa

$$c_n \le 10^n x - \left(10^{n-1}c_1 + 10^{n-2}c_2 + \ldots + 10c_{n-1}\right) < c_n + 1.$$

La única posibilidad es definir

$$c_n := \left[10^n x - \left(c_1 10^{n-1} + c_2 10^{n-2} + \ldots + c_{n-1} 10\right)\right].$$

Esto define la sucesión (c_n) ***por recurrencia, de tal forma que*** $r_n = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n}{10^n}$ ***satisface***

$$r_n \le x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

Consecuentemente $|r_n - x| < \frac{1}{10^n} \to 0$***, así que*** $r_n \to x$***. Claramente, la sucesión*** (r_n) ***es creciente, pues***

$$r_{n+1} = r_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \ge r_n, \forall n \in IN.$$

Además

$$\begin{aligned} r_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} &= r_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \\ &\le r_n + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \end{aligned}$$

$= r_n + \frac{1}{10^n}$.

Esto demuestra que la sucesión $s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$ es decreciente, y además $s_n \to x$. A continuación resumimos este resultado:

Teorema 6 **Dado un número real x, existe una única sucesión de naturales $c_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ tales que**

$$\frac{c_1}{10} + ... + \frac{c_n}{10^n} \leq x < \frac{c_1}{10} + ... + \frac{c_n + 1}{10^n}, \forall n \geq 1.$$

Además, la sucesión (r_n) definida arriba es creciente y converge a x, mientras que la sucesión (s_n) definida por $s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$ es decreciente y converge a x.

Definición 2.7.1 **Si (c_n) es la sucesión del teorema anterior, se dice que x tiene expansión decimal $0, c_1c_2...$, y se escribe $x = 0, c_1c_2....$**

En general, si $x > 0$ definimos $c_0 := [x]$, obteniendo $x - c_0 \in [0, 1[$. Si la expansión decimal de $x - c_0$ es $0, c_1c_2...$, escribimos $x = c_0, c_1c_2....$

Ejemplo 2.7.1 **Dado $x = \frac{7}{3}$, tenemos $[x] = 2$, y $x - 2 = \frac{1}{3} = 0, 333....$ Entonces $\frac{7}{3} = 2, 333....$**

Finalmente, para hallar la expansión de un número negativo x, se halla primero la expansión de $|x|$, y luego simplemente se le coloca el signo ``-''.

Ejemplo 2.7.2 **Para $x = -\frac{8}{5}$ tenemos $|x| = \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$, y $\frac{3}{5} = 0, 6$. Luego $x = -1, 6$.**

Nota: Uno se puede preguntar si dada una sucesión cualquiera (c_n), con $c_n \in \{0, ..., 9\}$, siempre existe un x cuya expansión decimal sea $0, a_1a_2....$ La respuesta es ``casi sí''. Para aclarar esto, tomemos por ejemplo $c_n = 9$ para todo n. En tal caso $r_n = 0, 99...9$, donde aparecen n nueves, mientras que $r_n + \frac{1}{10^n} = 1$. Nótese que no existe $x \in IR$ tal que

$$r_n \leq x < 1, \forall n \in IN.$$

Entonces la expansión decimal $0,\overline{9}$ no representaría ningún número real. Para corregir esto debemos admitir la posibilidad $x = r_n + \frac{1}{10^n}$, con lo que obtendríamos en particular $0,\overline{9} = 1$. Nótese que sin embargo esto implica que no hay unicidad de la representación decimal en ciertos casos. Por ejemplo:

$$1 = 1, 000... = 0, 999..., \quad \frac{1}{2} = 0, 500... = 0, 499....$$

Se puede demostrar que los únicos números que poseen dos representaciones decimales, son los racionales que se pueden escribir en la forma $\frac{k}{10^n}$, para algún $k \in IZ$ y algún $n \in IN$.

Ejercicios

1. Muestre usando el principio de inducción que:

   $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$, $n \in IN$.

   $1 + r + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, $n \in IN, r \neq 1$.

2. Muestre por inducción que $f(x) = x^n$ es estrictamente creciente en $[0, \infty[$, para todo $n \in IN$.

3. Sea $x > -1$. Use el principio de inducción para demostrar la desigualdad de Bernoulli:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \forall n \in IN.$$

4. Sea $x \in IR$. Demuestre que existe un único $k \in IZ$ tal que $k \leq x < k + 1$ (ya se demostró la existencia en el caso $x > 0$).

5. Usando la definición, y el principio de inducción, demuestre que para $m, n \in IN$ y $a, b \in IR^*$ se tiene

$$a^m a^n = a^{m+n}, \ (ab)^n = a^n b^n, \ (a^n)^m = a^{mn}.$$

6. Muestre usando el principio de inducción que para todo $n \in IN$ se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n} n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1), \qquad \sum_{k=0}^{n} n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2.$$

7. Muestre que $n^2 + 3n + 1$ es impar para todo $n \in IN$.

8. Muestre que $2n - 3 \leq 2^{n-2}$ para todo $n \geq 5$.

9. Muestre que para $n \in IN^*$ se tiene

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

   Calcule $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$.

10. Muestre que $11^n - 4^n$ es divisible por 7, para todo $n \in IN$.

11. Muestre que $a^n - b^n$ es divisible por $a - b$, para todo $n \in IN$ y $a, b \in IN$, $a > b$.

12. Demuestre por inducción que para $n \in IN$ se tiene:

    (a)
    $5^{2n} - 1$ es divisible por 8.

(b)

$5^n - 4n - 1$ es divisible por 16.

13. Para los siguientes conjuntos, demuestre que son acotados superiormente, y halle el supremo:

$$A = \{ x \in IQ : 1 \leq x < 3 \},\ B = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in IN \right\},\ C = \{ x \in IQ : x^2 < 3 \}.$$

14. Demuestre que el axioma del extremo superior implica la versión 1 del axioma de completitud.

15. Considere $B \subseteq IR$ no vacío. Decimos que B es acotado inferiormente si existe $a \in IR$ tal que $a \leq y$ para todo $y \in B$. En tal caso se dice que a es una cota inferior de B. Demuestre que si B es acotado inferiormente, existe una cota inferior máxima para B. Esto es, existe $\beta \in IR$ tal que:

(a)

β es cota inferior de B.

(b)

Si a es cota inferior de B, entonces $a \leq \beta$.

Tal β se llama el extremo inferior de B, y se denota $\beta = \inf B$. Sug. El conjunto

$$A = \{ a \in IR : a \text{ es cota inferior de } B \}$$

es acotado superiormente.

16. Si $x < y$, $n \in IN$, demuestre que existen al menos n racionales entre x y y (use inducción). Concluya que existe un número infinito de racionales entre x y y.

17. Si $n \in IN$ y $x, y \in IR$, demuestre que

$$x^n - y^n = (x - y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1} \right).$$

Puede usar el ejercicio 1.

18. Demuestre que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ son irracionales. En general, demuestre que $\sqrt{p}$ es irracional, si p es primo. Se puede demostrar que $\sqrt{n}$ es irracional, siempre que $n \in IN$ no sea cuadrado perfecto.

19. Si a es racional y b irracional, demuestre que $a + b$ es irracional. En particular, $-b$ es irracional. [Sug. La suma de racionales es racional]. ¿Qué pasa con la suma si ambos a y b son irracionales?

20. Si $a \neq 0$ es racional y b irracional, demuestre que ab, ab^{-1} son irracionales. En particular, b^{-1} es irracional. [Sug. Producto y división de racionales es racional]. ¿Qué pasa con el producto si ambos a y b son irracionales?

21. Use el ejercicio anterior, y la densidad de IQ, para demostrar que el conjunto de los números irracionales es denso en IR.

22. Dé un ejemplo de dos números irracionales, tales que su suma y su producto sean ambos racionales.

23. Demuestre que $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ son irracionales.

24. Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones. En caso convergente, halle el límite:

$$a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \qquad a_n = \cos n\pi \qquad a_n = n^{(-1)^n}$$

$$a_n = 1 + (-1)^n \qquad a_n = \frac{1+(-1)^n}{n} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n} + (-1)^n$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\, sen\, n}{n+1} \qquad a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \qquad a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$$

25. Estudie la convergencia. En caso convergente obtenga el límite.

$$a_n = \frac{n^2+3n+1}{5n^2-4}, \quad c_n = \frac{1}{n}\left[\frac{n^2}{3}\right], \quad b_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

26. Sea (x_n) definida por

$$x_1 = 2, \; x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 4}, \; \forall n \geq 1.$$

Muestre por inducción que esta sucesión es creciente y acotada superiormente por $M = 4$. Concluya que (x_n) es convergente y halle el límite.

27. Si $a_n \to \infty$, demuestre que $\frac{a_n}{1+a_n} \to 1$.

28. Suponga que $a_n \to 0$, y que $a_n > 0$ para todo n. Demuestre que $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ diverge a infinito.

29. Estudie la convergencia:

$$a_n = \left[\frac{n}{2}\right]^{1/n}, \quad b_n = \frac{3n^2 + (-1)^n n}{2n^2 + \cos(2^n + n)}, \quad c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

30. Demuestre, utilizando la definición, la convergencia de las sucesiones:

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad b_n = \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right], \quad c_n = \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}, \quad d_n = \frac{n\operatorname{sen} n}{2n^2-1}.$$

31. Demuestre que (a_n) converge a l si, y solo si, $(|a_n - l|)$ converge a 0.

32. Si $a_n \to l$, demuestre que $|a_n| \to |l|$.

33. Considere (a_n) dada recurrentemente por: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{a_n}}$, para $n \geq 1$.

(a)

Demuestre que esta sucesión es creciente. Sug. Observe que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_{n+1} + a_n}.$$

(b)

Demuestre que $\sqrt{2} \leq a_n \leq \frac{3}{2}, \forall\ n \in IN$.

(c)

Concluya que (a_n) converge a un número l que satisface $l = \sqrt{1 + \sqrt{l}}$. Calcule a_1, a_5, a_9.

34. Estudie la convergencia de la sucesión geométrica dada por $a_1 = c$, $a_{n+1} = \lambda a_n, \forall\ n \geq 2$.

35. Considere la sucesión dada por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{ca_n}, \forall\ n \geq 2$, con $c > 0$. Muestre que $a_n \to c$. (Sug. $a_n^2 - a_{n-1}^2 = c(a_{n-1} - a_{n-2})$. Muestre que la sucesión es monótona y se mantiene entre c y 1).

36. Considere la sucesión dada por $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} = 3 - \frac{6}{3+a_n}, \forall\ n \geq 2$.

(a)

Muestre que (a_n) es decreciente, y $a_n \geq \sqrt{3}, \forall\ n \in IN$.

(b)

Concluya que $a_n \to \sqrt{3}$.

37. **(Existencia de raíces vía sucesiones) Considere $p \in IN$. Dado x_0 tal que $x_0^p > a > 1$, considere la sucesión definida recurrentemente por**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{px_n^{p-1}}, \quad \forall n \in IN.$$

(a)

Muestre por inducción que $x_n^p > a$, para todo $n \in IN$. Sug. Escriba

$$x_{n+1}^p = x_n^p \left(1 - \frac{x_n^p - a}{px_n^p} \right)^p,$$

y luego use la desigualdad de Bernoulli (ejercicio 3).

(b)

Use la parte anterior para mostrar que (x_n) es decreciente. Sug. Para el paso inductivo escriba

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{px_n^{p-1}},$$

y recuerde que $a < x_n^p$.

(c)
Concluya que (x_n) es convergente, y que $\alpha = \lim x_n$ es tal que $\alpha^p = a$.

Nota: Esta sucesión se obtiene aplicando el método de Newton ***a la función $f(x) = x^n - a$. Es decir, para cada n se considera la recta tangente al gráfico de f, en el punto $(x_n, f(x_n))$, y se define x_{n+1} como el punto en que esa recta corta al eje x. En efecto, la recta tangente en el punto $(x_n, f(x_n))$ tiene ecuación***

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

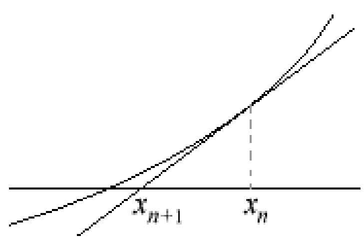
Para encontrar el punto en que esta recta corta al eje x, debemos resolver

$$f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = 0,$$

con lo cual obtenemos

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}} = x_{n+1}.$$

Usted debe demostrar que (x_n) converge a la raíz positiva de f, lo cual es geométricamente evidente.



Exponentes racionales

En este capítulo le daremos sentido a la expresión a^r, donde a es un número real positivo y r es un número racional cualquiera.

Subsections

- Exponente natural
- Exponente entero
- Exponente fraccionario
- Ejercicios

Exponente natural

Comenzaremos con el caso $r = n \in IN$, el cual no da mucho problema desde un punto de vista intuitivo. Se

define

$$a^{n} := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}} .$$

Esta definición presenta sin embargo un pequeño problema de rigurosidad, el cual no es difícil de corregir usando el principio de inducción. Podemos definir

$$a^{1} = a, \ \ a^{n+1} = a^{n} \cdot a, \ \ \forall n \in IN.$$

Esto define a^1, y una vez definido a^n, nos permite definir a^{n+1}. Así, por inducción obtenemos la definición para todo $n \in IN$.

Las siguientes propiedades se pueden intuir sin mucha dificultad:

1. $a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$, $n, m \in IIN$, $a \in IR$

2. $(a^{n})^{m} = a^{n \cdot m}$, $n, m \in IN$, $a \in IR$

3. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $n > m$, $a \neq 0$

4. $(ab)^{n} = a^{n} \cdot b^{n}$, $n \in IN$, $a, b \in IR$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^n}{b^n}$, $n \in IN$, $a \in IR$, $b \neq 0$.

Como ejemplo demostremos la propiedad 1: Aquí otra vez se puede apelar a la intuición y decir que

$$a^{m} \cdot a^{n} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ veces}}$$

Pero si se quiere ser riguroso, se debe usar el principio de inducción otra vez. Dejamos m fijo y aplicamos inducción sobre n.

- **Para $n = 1$, tenemos $a^{m} \cdot a^{n} = a^{m} \cdot a = a^{m+1}$ por definición.**
- **En el paso inductivo tenemos como hipótesis $a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$, y entonces por las propiedades del producto**

$$a^{m} \cdot a^{n+1} = a^{m} \cdot (a^{n} \cdot a) = (a^{m} \cdot a^{n}) \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a^{(m+n)+1} = a^{m+(n+1)}.$$

La segunda igualdad se trata similarmente, mientras que la tercera se puede demostrar usando la primera. En efecto, como $n - m \in IN$ tenemos

$$a^{n-m} \cdot a^{m} = a^{(n-m)+m} = a^{n},$$

y luego dividimos por a^m para obtener el resultado. La verificación de las otras identidades se deja como ejercicio

para el lector.

Exponente entero

Las identidades de la sección anterior nos dan una idea de lo que debemos hacer en el caso de exponentes enteros. Si, por ejemplo, queremos que la tercera identidad sea válida con n = m, debemos tener

$$a^0 = a^{n - n} = \frac{a^n}{a^n} = 1.$$

Debemos definir entonces $a^0 := 1$. Nótese que no hemos demostrado que $a^0 = 1$, solo hemos justificado por qué definirlo así.

Tratemos ahora de definir a^{-m}, para $m \in IN$. Para comenzar, si queremos que la propiedad 1 sea válida con exponentes negativos, debemos tener por ejemplo

$$a^{-2} \cdot a^2 = a^{-2 + 2} = a^0 = 1,$$

y dividiendo por a^2 obtenemos

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$$

En general, tomando m en lugar de 2 obtenemos que para que se cumpla $a^{-m} \cdot a^m = a^0$, debe definirse:

$$a^{-m} := \frac{1}{a^m}, \ \forall m \in IIN.$$

Con esto tenemos definido a^z, para $a \neq 0$ y cualquier $z \in IZ$.

En este punto debemos demostrar que las propiedades 1,...,5 siguen siendo válidas para todo n, m $\in$ IZ. Por ejemplo, nótese que

$$a^{-4} \cdot a^3 = \frac{1}{a^4} \cdot a^3 = \frac{a^3}{a^4} = \left(\frac{a^4}{a^3} \right)^{-1} = a^{-1} = a^{-4 + 3}.$$

El caso general no es más complicado que esto. Tomando por ejemplo $p \geq m$ tenemos

$$a^{-p} \cdot a^m = \frac{a^m}{a^p} = \left(\frac{a^p}{a^m} \right)^{-1} = \left(a^{p - m} \right)^{-1} = a^{-(p - m)} = a^{-p + m}.$$

Esto demuestra la propiedad 1 en el caso $n = -p$, con $p \geq m$. El caso $p < m$ es más fácil.

Similarmente procedemos con la propiedad 2: Si $n = -p < 0$ y $m > 0$, tenemos

$$(a^{n})^{m} = (a^{-p})^{m} = \left(\frac{1}{a^{p}}\right)^{m} = \frac{1}{a^{pm}} = a^{-pm} = a^{nm},$$

donde usamos las propiedades 2 y 5 para p, m $\in$ IN. Los otros casos se tratan de manera similar.

Ejemplo 3.2.1 Simplificar la expresión

$$\frac{(ab^{-2}c^{3})^{-4}}{(a^{-3}b^{2}c^{-4})^{3}}.$$

Aplicando las propiedades 2 y 5 para exponentes enteros tenemos

$$(ab^{-2}c^{3})^{-4} = (ab^{-2})^{-4}(c^{3})^{-4} = a^{-4}b^{8}c^{-12},$$

mientras que

$$(a^{-3}b^{2}c^{-4})^{3} = a^{-9}b^{6}c^{-12}.$$

Luego, por las propiedades 3 y 4 se obtiene

$$\frac{(ab^{-2}c^{3})^{-4}}{(a^{-1}b^{2}c^{-4})^{3}} = \frac{a^{-4}b^{8}c^{-12}}{a^{-9}b^{6}c^{-12}} = a^{9-4}b^{8-6} = a^{5}b^{2}.$$

Ejemplo 3.2.2 Resolver la siguiente ecuación:

$$2 \cdot 4^{n} - 9 \cdot 2^{n} + 4 = 0, \quad n \in IZ.$$

Tomando $x = 2^{n}$ obtenemos la ecuación $2x^{2} - 9x + 4 = 0$. Factorixando por inspección, o usando la fórmula general, obtenemos las soluciones $x = 4$, $x = \frac{1}{2}$. Si $x = 4$ obtenemos $2^{n} = 2^{2}$, y no es difícil convencerse de que esto implica $n = 2$. Similarmente, si $x = \frac{1}{2}$ se sigue que $n = -1$. El conjunto solución es entonces $S = \{ -1, 2 \}$.

Exponente fraccionario

Para pasar a exponentes fraccionarios, tratemos de adivinar la definición usando la propiedad 2. Si queremos que esta propiedad siga siendo válida en IQ, debe tenerse

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n} = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^{1} = a.$$

En otras palabras, $b := a^{\frac{1}{n}}$ debe satisfacer $b^{n} = a$. Esto nos lleva a lo que ``por definición'' se llama ``raíz n-ésima'' de a. Definimos entonces

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

Pero, ¿Quién nos dice que existe un número real b tal que $b^n = a$?

La respuesta es: la **completitud** *de IR. Para aclarar esto bien, primero observemos que la función $f(x) = x^n$ es estrictamente creciente en $[0, \infty)$. Esto puede demostrarse por inducción:*

- **Para $n = 1$ tenemos $f(x) = x$, que es estrictamente creciente.**
- **Si se sabe que $f(x) = x^n$ es estrictamente creciente, entonces para $0 \leq x < y$ se tiene**

$$x^{n+1} = x^n \cdot x < y^n \cdot x < y^n \cdot y = y^{n+1},$$

lo que demuestra que $g(x) = x^{n+1}$ es también estrictamente creciente.

También puede recurrirse a la identidad

$$x^n - y^n = (x - y)\left(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot y + \cdots + x \cdot y^{n-2} + y^{n-1}\right),$$

donde vemos que el segundo factor del lado derecho es positivo para x, y positivos, y por lo tanto el signo de $x^n - y^n$ es el mismo que el de x - y.

Ahora consideremos los conjuntos

$$A = \{x \geq 0 : x^n < a\}, \ B = \{y \geq 0 : y^n \geq a\}.$$

Note que $A \neq \emptyset$ pues $0 \in A$, y $B \neq \emptyset$ pues $a + 1 \in B$. Además, para $x \in A$ y $y \in B$ se tiene $x \leq y$. El axioma del extremo superior asegura la existencia de $\alpha \in B$ tal que $x \leq \alpha \leq y$, para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Luego se demuestra que $\alpha^n = a$, y por lo tanto α es la raíz n -ésima de a, y se denota por $\alpha = \sqrt[n]{a}$. En el capítulo 1 se demostró el caso n = 2. El caso general se demuestra, usando sucesiones, en el ejercicio 37 del capítulo 1.

Una vez resuelto el problema de la existencia de las raíces, usando la propiedad 2 como modelo vemos que para $\frac{m}{n} \in IQ$ debe definirse

$$a^{m/n} := (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Nota: Tomando $b = \sqrt[n]{a}$ tenemos $b^n = a$, y por la propiedad 2 (con exponente natural) se sigue que

$$(b^m)^n = b^{mn} = (b^n)^m = a^m,$$

lo que significa que b^m es la raíz n -ésima de a^m. Esto demuestra que

$$(\sqrt[n]{a})^m = b^m = \sqrt[n]{a^m},$$

o equivalentemente:

$$\left(a^{1/n} \right)^m = a^{m/n}.$$

El próximo paso es verificar las propiedades 1,...,5 para exponentes racionales. Esto es, para a, b > 0 se tiene:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \ \forall r, s \in IQ$
2. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}, \ \forall r, s \in IQ$
3. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \ \forall r, s \in IQ$
4. $(ab)^r = a^r \cdot b^r, \ \forall r \in IQ$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \ \forall r \in IQ.$

Mostremos como ejemplo la propiedad 2: Si $r = \frac{m}{n}$ *y* $s = \frac{p}{q}$, *con n > 0 y q > 0, tenemos que*

$$(a^r)^s = \left(\sqrt[n]{a^m} \right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}$$

$$= \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[qn]{a^{mp}}$$

$$= a^{\frac{mp}{qn}} = a^{rs}.$$

El único paso que no está aún justificado es la igualdad $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[qn]{a^{mp}}$. *Para demostrar esto sean* $b = a^{mp}$ *y* $c = \sqrt[q]{\sqrt[n]{b}}$. *Entonces* $c^q = \sqrt[n]{b}$, *y por lo tanto* $(c^q)^n = b$. *Por la propiedad 2 para exponentes enteros tenemos que* $c^{qn} = b$, *y esto significa que* $c = \sqrt[qn]{b} = \sqrt[qn]{a^{mp}}$.

Ejemplo 3.3.1 Resolver la ecuación $x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2 = 0$. Tomando $t = x^{\frac{1}{3}}$ tenemos $t^2 - 3t + 2 = 0$, y resolviendo se obtiene $t \in \{1, 2\}$. Luego, la solución es $x \in \{1, 8\}$.

Ejemplo 3.3.2 Resolver $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$. Tomando $t = 2^x$ tenemos $4^x = 2^{2x} = t^2$, $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2t$, así que la ecuación es $t^2 - 2t + 1 = 0$, y entonces $t = 1$. Luego la solución es $x = 0$.

Concluimos este capítulo demostrando que la función $f: IQ \rightarrow IR$, *definida por* $f(r) = a^r$, *es estrictamente creciente en IQ, para a > 1. Esto es*

$$a^r < a^s \text{ si } r < s, \text{ con } r, s \in IQ.$$

En efecto, para $n \in IN$ *y b > 0 tenemos*

$$b^n > 1 \text{ si y solo si } b > 1,$$

por ser $f(x) = x^n$ estrictamente creciente. Luego, si $s - r = \frac{m}{n} > 0$, podemos asumir que $m, n \in IN$, así que $a^m > 1$. Ahora, como $b = a^{s-r} = a^{m/n}$ satisface $b^n = a^m > 1$, concluimos que $b > 1$. Finalmente

$$a^s = a^r a^{s-r} = a^r b > a^r, \text{ si } r < s.$$

Ejercicios

1. Demuestre usando inducción, las propiedades de potenciación con exponentes naturales.
2. Usando las propiedades de potenciación con exponentes naturales, demuéstrelas para exponentes enteros.
3. Demuestre las propiedades de potenciación con exponentes racionales, usando las correspondientes a exponentes enteros.
4. De las siguientes expresiones, comente sobre cuales tienen sentido y cuales no:

   0^{-1} $(-1)^3$ $(-4)^{1/2}$ $(-5)^0$ $\sqrt{(-2)^4}$

5. De las siguientes igualdades, marque las que son verdaderas

   $\sqrt{(-1)^2} = -1$ $5^0 = 0$ $4^{-2} = -16$ $9^{1/2} = \frac{1}{81}$

6. Simplifique las siguientes expresiones

   $\frac{a^2 b}{ab^{-2}}$, $\frac{(a^2)^n a^n}{a^3}$, $\left(\sqrt[3]{a^5 b \sqrt{a^2 b^4 c}}\right)^6$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales para $x \in IQ$:

$$\begin{array}{llll} 2^{x+1} = 4 & 3^{-x+1} = 9^x & 2^{x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} & 3^{x^2-1} = 27 \\ x^3 = x^{x+1} & 3^{-x+1} = 3^{2x+3} & 7^{x^2-1} = 1 & 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \\ 3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4 & 8^{3x-1} = 16^{2x+1} & 4^x = 3 \cdot 2^{x+1} - 8 & x^x = \sqrt{x}. \end{array}$$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones

$$\begin{array}{lll} \sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} + 2 = 0 & 2x^6 + 11x^3 = 6 & x^3 - 3x^{3/2} - 1 = 0 \\ \sqrt[3]{x} + 9\sqrt[6]{x} + 14 = 0 & 2x^4 + 11x^2 = 6 & x^{4/3} - x^{2/3} - 1 = 0. \end{array}$$

9. Si $a > 0$, demuestre con detalle que $a^r > 0$ para todo $r \in IQ$.
10. Demuestre que para $r \in IQ^+$ se tiene que la función $f(x) = x^r$ es creciente en $[0, \infty[$.
11. Si $n \in IN$ es impar, demuestre que $f(x) = x^n$ define una función estrictamente creciente en IR. Además f es biyectiva. ¿Cuál es su inversa?
12. Si n es par, entonces $f = IR^- \rightarrow IR^+$, definida por $f(x) = x^n$, es biyectiva y estrictamente decreciente. ¿Cuál es su inversa?

13. Si $0 < a < 1$, demuestre que la función $f : IQ \to IR$, definida por $f(r) = a^r$, es estrictamente decreciente. En particular $a^n < a$ para cada $n \in IN$.

14. Demuestre usando el principio de inducción que si $\varepsilon > 0$ se tiene

$$(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon + \tfrac{1}{2}n(n - 1)\varepsilon^2, \forall n \in IN.$$

Concluya que la sucesión $(\sqrt[n]{n})_{n\in IN}$ converge a 1. Sug. $n = (1 + \varepsilon_n)^n$, donde $\varepsilon_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$.

El paso a exponentes reales

Consideremos ahora el problema de definir 2^x, para números irracionales como $\sqrt{2}$, π, etc. La idea es tomar racionales que ``aproximen'' a $\sqrt{2}$, digamos

$$r_0 = 1, \; r_1 = 1.4, \; r_2 = 1.41, ...$$

Sabemos definir 2^{r_0}, 2^{r_1}, 2^{r_2}, ..., y se espera que estos números ``se acerquen'' a un número real que llamaremos $2^{\sqrt{2}}$. Más adelante explotaremos esta idea de usar sucesiones para definir a^x. Por ahora haremos una construcción usando el axioma del extremo superior. Vamos a tomar el caso a = 2 para simplificar notación.

Tomemos $x \in IR \setminus IQ$ y consideremos los conjuntos

$$A = \{ 2^r : r \in IQ, r < x \}, \; B = \{ y \in IR : y \text{ es cota superior de } A \}.$$

Por el axioma de completitud existe $\alpha = \sup A \in IR$ tal que $z \leq \alpha \leq y$, para todo $z \in A$ y todo $y \in B$. Note que en particular $\alpha \in B$ (α es la menor cota superior de A).

Además, $2^s \in B$ si $s \in IQ$ y $s > x$, pues

$$\begin{aligned} s > x \quad &\Rightarrow \quad s > r, \; \forall r \in IQ, \; r < x \\ &\Rightarrow \quad 2^s > 2^r, \; \forall r \in IQ, \; r < x \\ &\Rightarrow \quad 2^s > z, \; \forall z \in A. \end{aligned}$$

Definimos $2^x := \alpha = \sup A$. Note entonces que

$$2^r \leq 2^x \leq 2^s, \text{ para } r, s \in IQ \text{ tales que } r < x < s.$$

Mejor aún, la función $f(x) = 2^x$ así definida, es estrictamente creciente en IR. En efecto, tomemos $x, y \in IR$ tales que $x < y$. Entonces existe un racional r tal que $x < r < y$, y luego existe otro racional s tal que $r < s < y$. Por ser f estrictamente creciente en IQ obtenemos $2^x \leq 2^r < 2^s \leq 2^y$, y en particular $2^x < 2^y$.

La misma construcción se puede hacer para $f(x) = a^x$, con $a > 0$ cualquiera (para $0 < a < 1$, la función resulta decreciente, y para $a = 1$ es constante). Aunque es un poco tedioso, se pueden demostrar las propiedades 1,...,5 para exponentes reales. Esto es más sencillo con el enfoque vía sucesiones que estudiaremos luego.

Ejemplo 4.0.1 $\left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2.$

Ejemplo 4.0.2 $(4)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 2^{\sqrt{2}}.$

Ejemplo 4.0.3 Resolver la ecuación $x^{\sqrt{8}} - 3x^{\sqrt{2}} + 2 = 0$. Tomando $t = x^{\sqrt{2}}$ tenemos $t^2 - 3t + 2 = 0$. Resolviendo obtenemos $t \in \{1, 2\}$, así que $x \in \left\{ 1, 2^{1/\sqrt{2}} \right\}$.

Subsections

- Construcción vía sucesiones
- Continuidad y sobreyectividad de la Exponencial*
- La función logarítmica
- Derivada y el número *e*
- Existencia del número *e*
- Conclusión
- Ejercicios

Construcción vía sucesiones

En esta sección definimos $f(x) = a^x$ para $a > 1$ y $x \in IR$, partiendo de la definición para $x \in IQ$. Para esto recordemos (sección 2.7) que existen sucesiones (r_n) y (s_n), la primera creciente y la segunda decreciente, tales que

$$r_n \leq x < s_n = r_n + \frac{1}{10^n}, \quad \forall n \in IN.$$

Como $a > 1$, se tiene que $f(r) = a^r$ es estrictamente creciente en IQ. Luego, como

$$r_1 \leq r_n \leq r_{n+1} \leq x \leq s_{n+1} \leq s_n \leq s_1, \quad \forall n \in IN,$$

tenemos

$$a^{r_1} < a^{r_n} < a^{r_{n+1}} < a^{s_{n+1}} < a^{s_n} < a^{s_1}, \quad \forall n \in IN.$$

Esto muestra que la sucesión (a^{r_n}) es creciente y acotada superiormente por a^{s_1}, mientras que la sucesión (a^{s_n}) es decreciente y acotada inferiormente por a^{r_1}. Por el teorema de Weierstrass, ambas sucesiones son convergentes. Definamos

$$\lambda = \lim a^{r_n}, \quad \mu = \lim a^{s_n}.$$

Recordemos el ejemplo 2.6.22, donde mostramos que

$$a^{1/n} \to 1.$$

Como $10^n > n$ tenemos $1 < a^{1/10^n} < a^{1/n} \to 1$, así que $a^{1/10^n} \to 1$. Luego

$$\mu = \lim a^{s_n} = \lim a^{r_n + 1/10^n} = \lim a^{r_n} a^{1/10^n} = \lambda.$$

Note que entonces λ es el único número real que es a la vez mayor que cada a^{r_n} y menor que cada a^{s_n}. Si queremos que f siga siendo creciente, la única definición posible para a^x es

$$a^x := \lambda = \lim_{n \to \infty} a^{r_n}.$$

Es claro entonces que esta definición coincide con la hecha anteriormente, usando el axioma del extremo superior de una manera directa. Esta nueva definición, con el uso de sucesiones, simplifica enormemente el trabajo al demostrar las propiedades de la exponencial para exponentes reales. Para hacerlo, el siguiente lema es de gran ayuda.

Lema 4.1.1 Si (α_n) es una sucesión de racionales que converge a x, entonces la sucesión (a^{α_n}) converge a a^x.

Prueba

Recordemos que por la desigualdad de Bernoulli se tiene que

$$a = (1 + \varepsilon_n)^n > 1 + n\varepsilon_n > n\varepsilon_n,$$

donde $\varepsilon_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. De aquí se concluye que

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{a}{n}, \forall n \in IN. \tag{4.1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in IN$ tal que $\frac{a}{m} < \varepsilon$, de donde

$$a^{\frac{1}{m}} < 1 + \frac{a}{m} < 1 + \varepsilon.$$

Luego, como $\alpha_n - r_n \to 0$, existe $N \in IN$ tal que $-\frac{1}{m} < \alpha_n - r_n < \frac{1}{m}$, $\forall n \geq N$. Consecuentemente

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon} < a^{-\frac{1}{m}} < a^{\alpha_n - r_n} < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon, \forall n \geq N.$$

Esto muestra que $a^{\alpha_n - r_n} \to 1$, y luego

$$a^{\alpha_n} = a^{r_n} a^{\alpha_n - r_n} \to a^x \cdot 1 = a^x.$$

El lema anteior será la herramienta principal en la demostración de las propiedades de la exponencial con exponente real. Veamos:

1. **Para $a > 1$, la función $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente en IR.**

   En efecto, sean $x, y \in IR$ tales que $x < y$. Sean (s_n) y (t_n) sucesiones de racionales tales que la primera crece a x y la segunda decrece a y. Sean $p, q \in IQ$ tales que $x < p < q < y$. Entonces

   $$a^{s_n} < a^p < a^q < a^{t_n}, \forall n \in IN.$$

   Luego

   $$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} \leq a^p < a^q \leq \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^y.$$

2. **Para $x, y \in IR$ se tiene $a^{x+y} = a^x a^y$.**

   Tome (s_n) y (t_n) sucesiones de racionales tales que $s_n \to x$ y $t_n \to y$. Entonces $s_n + t_n \to x + y$, y por el lema anterior

   $$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n + t_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} a^{t_n} = a^x a^y.$$

3. **Para $x, y \in IR$ se tiene $(a^x)^y = a^{xy}$.**

   Aquí hay que ser un poco más cuidadoso. Asumamos primero que x y y son positivos. Tomemos sucesiones de racionales positivos (r_n), (s_n) y (t_n) tales que (r_n) crece a x, (s_n) decrece a x, y $t_n \to y$. Como $a^{r_n} < a^x$ entonces[4.1] $a^{r_n t_n} = (a^{r_n})^{t_n} < (a^x)^{t_n}$, de donde por el lema anterior

   $$a^{xy} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n t_n} \leq \lim_{n\to\infty} (a^x)^{t_n} = (a^x)^y.$$

   Similarmente

   $$a^{xy} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n t_n} \geq \lim_{n\to\infty} (a^x)^{t_n} = (a^x)^y.$$

   Pegando las dos desigualdades se obtiene la igualdad. Si $x < 0$ ó $y < 0$ se procede similarmente.

Nota: En esta sección se trabajó con el caso $a > 1$. Para $0 < a < 1$ tenemos que $b = \frac{1}{a} > 1$, y podemos definir

$$a^x := \frac{1}{b^x}, \forall x \in IR.$$

Las propiedades demostradas arriba siguen siendo válidas para $0 < a < 1$, excepto que ahora la función $f(x) = a^x$ es estrictamente decreciente.

Continuidad y sobreyectividad de la Exponencial *

Sea $a > 1$, y consideremos la función $f(x) = a^x$ acabada de definir.

Recordemos la desigualdad (4.1):

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{a}{n}, \text{ para } a > 1 \text{ y } n \in IN.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $n \in IN$ tal que $\frac{a}{n} < \varepsilon$. Luego para $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ tenemos

$$a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{a}{n} < 1 + \varepsilon,$$

y también

$$a^x > a^{-\frac{1}{n}} > \frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon.$$

Esto demuestra que tomando $\delta = \frac{1}{n}$ se tiene

$$|x| < \delta \Rightarrow |a^x - 1| < \varepsilon,$$

lo que significa

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1.$$

En otras palabras, la función exponencial es continua en $x = 0$. En general, haciendo el cambio $t = x - x_0$ tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{x \to x_0} a^{x_0} \cdot a^{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{t \to 0} a^t = a^{x_0},$$

y entonces la función exponencial de base a es continua en todo IR.

Ahora que tenemos la continuidad, podemos usar el teorema de valores intermedios para concluir que el rango de la función exponencial es todo IR^+. Para esto consideremos $y > 0$ y observemos que

$$a^n = (1 + a - 1)^n > n(a - 1).$$

Por arquimedianidad existe $n_1 \in IN$ tal que $n_1(a - 1) > y$, de donde

$$a^{n_1} > n_1(a - 1) > y.$$

De la misma forma existe $n_0 \in IN$ tal que $n_0(a - 1) > \frac{1}{y}$, de donde $a^{n_0} > \frac{1}{y}$. Consecuentemente tenemos

$$a^{-n_0} < y < a^{n_1}.$$

Por el teorema de los valores intermedios, existe $x \in \,]\, -n_0, n_1\,[$ tal que $a^x = y$. Esto demuestra que la función

$$f : IR \to \,]\,0, \infty\,[\,,\ f(x) = a^x, \tag{4.2}$$

es sobreyectiva. Como ya sabíamos que era inyectiva (por ser estrictamente creciente), se concluye que es de hecho biyectiva.

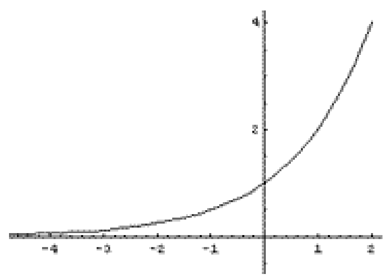
Nota: Para $0 < a < 1$ tenemos

$$a^x = \frac{1}{b^x}\,,\ \text{con}\ b = \frac{1}{a} > 1,$$

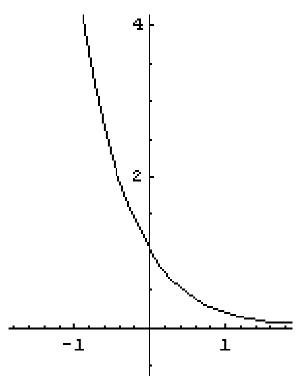
y no es difícil convencerse de que sigue siendo biyectiva y continua. En adelante, cuando hablemos de la función exponencial, nos referimos a la función deinida por (4.2), con $a > 0$ y $a \neq 1$. Resumamos lo que tenemos:

Teorema 7 **La función exponencial dada en (4.2) es biyectiva y continua. Además, es estrictamente creciente si $a > 1$, y estrictamente decreciente se $0 < a < 1$.**

El gráfico de f tiene la siguiente representación geométrica, en el caso $a > 1$:



En el caso $0 < a < 1$ la función resulta decreciente, y su gráfico se representa así:



La función logarítmica

Dado que la función exponencial de base a es biyectiva de IR en $]\,0, \infty\,[$, existe su inversa, que denotamos

$$\log_a : \,]\,0, \infty\,[\, \to IR.$$

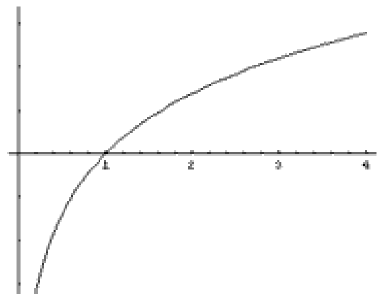
Tenemos entonces, por definición de función inversa, que

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

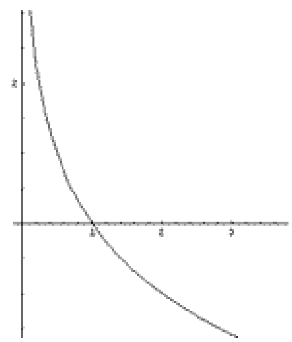
Escrito de otra forma:

$$\log_a a^x = x, \forall x \in IR; \quad a^{\log_a y} = y, \forall y > 0.$$

El gráfico de la función $\log_a$ se obtiene del gráfico de $f(x) = a^x$, reflejando con respecto a la recta $y = x$. En el caso $a > 1$ obtenemos,



y si $0 < a < 1$ se obtiene



Basados en las propiedades de la función exponencial, podemos deducir las propiedades de la función logarítmica. Veamos:

- **$\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$.**
- **$\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$.**
- **Sean $t = \log_a x$, $s = \log_a y$. Entonces $a^t = x$, $a^s = y$. Luego $x \cdot y = a^t \cdot a^s = a^{t+s}$, de donde $t + s = \log_a (x \cdot y)$. Esto demuestra que**

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall x, y > 0.$$

- **Sea $t = \log_a x$. Entonces $a^{ts} = (a^t)^s = x^s$, $\forall s \in IR$, de donde $ts = \log_a x^s$. Esto demuestra que**

$$\log_a x^s = s \log_a x, \quad \forall x > 0, \quad \forall s \in IR.$$

En particular con $s = -1$ obtenemos

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x, \quad \forall x > 0.$$

- **Combinando las dos propiedades anteriores obtenemos**

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \forall x, y > 0.$$

- **La función $\log_a x$ es estrictamente creciente en $]\,0, \infty\,[$, si $a > 1$, por ser la inversa de una función creciente.**

  En efecto, sea $0 < x < y$, y sea $t = \log_a x$, $s = \log_a y$. Supongamos que $t \geq s$. Entonces, como la exponencial de base a es creciente tendríamos $x = a^t \geq a^s = y$, lo cual es imposible. Entonces $\log_a x = t < s = \log_a y$.

- **Cambio de base:**

  Sean $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Sean $x > 0$, $t = \log_a x$, $s = \log_b x$. Tenemos $a^t = x = b^s$, de donde $t = \log_a b^s = s \log_a b$. Luego

$$s = \frac{t}{\log_a b},$$

  lo que demuestra que

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Derivada y el número *e*

En esta sección motivamos la definición del número e que daremos en la siguiente. Si el lector no está familiarizado con la noción de derivada, puede pasar directamente a la sección 4.5.

Sea $g(x) = \log_a x$, y tratemos de derivar esta función en $x = 1$. Tenemos

$$g'(1) = \lim_{t \to 0} \frac{\log_a(1+t) - \log_a 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \log_a(1+t) = \lim_{t \to 0} \log_a (1+t)^{1/t}.$$

Asumiendo que existe el límite

$$e := \lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x,$$

tenemos $g'(1) = \log_a e$. En la próxima sección demostramos la existencia de dicho límite. Aquí hemos usado además la continuidad de la función logarítmica, lo cual es consecuencia de la continuidad de la exponencial (ejercicio: demuéstrelo). En particular, si $a = e$ obtenemos $g'(1) = \log_e e = 1$. En este caso la función g se suele llamar el **logaritmo natural**, ***o*** **logaritmo neperiano**, ***y se una la notación***

$$\ln x = \log_e x.$$

Tenemos entonces que para g(x) = ln x se tiene

$$g'(1) = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1. \tag{4.3}$$

Para x > 0 arbitrario tenemos

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \ln x = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(x+t) - \ln x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{t}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \frac{x}{t} \ln\left(1 + \frac{t}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{1}{x},$$

donde hemos hecho el cambio** $u = \frac{t}{x}$**, y usamos (4.3).

Tratemos ahora de derivar la función** $f(x) = e^x$**. Como f es continua, haciendo el cambio** $t = e^h$ **tenemos

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{t \to 1} \frac{t-1}{\ln t} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{g'(1)} = 1,$$

donde g(x) = ln x. Luego, en general

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x, \ \forall x \in IR.$$

Tenemos entonces

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \ \forall x \in IR.$$

Nota: Esta propiedad es exclusiva de la función exponencial de base e. En efecto, se puede demostrar que si una función satisface** $f' = f$**, entonces** $f(x) = Ce^x$**, para alguna constante C.

Existencia del número *e*

Considere las sucesiones

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x, \ y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Entonces** $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n > x_n$**, para todo** $n \in IN$**. Además

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n \frac{n+2}{n+1} > \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2} \right) \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)^3} > 1,$$

para todo $n \in$ IN. En el segundo renglón, hemos hecho uso de la desigualdad de Bernoulli, con $x = -\frac{1}{(n+1)^2} > -1$. Esto demuestra que la sucesión (x_n) es creciente. Similarmente se demuestra que la sucesión (y_n) es decreciente. En efecto, el lector puede verificar que

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} > \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)} \right) \frac{n+1}{n+2} > 1.$$

En particular se tiene

$$2 = x_1 < x_n < y_n < y_1 = 4,$$

así que ambas sucesiones son acotadas. Por el teorema de Weierstrass (x_n) es convergente, y podemos definir

$$e := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^x.$$

Para el cálculo de derivadas, necesitamos tomar el límite no solo sobre naturales, sino sobre los reales.

Teorema 8 Para el número *e* que acabamos de definir se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

Prueba

Tomemos $x \in$ IR y definamos $n = [x]$. Tenemos entonces $n \leq x < n + 1$, y consecuentemente

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Luego

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^x \geq \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^x = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2},$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = e,$$

se tiene

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]} = e.$$

Por otro lado, dado que 0 $\leq$ x - [x] < 1, se tiene

$$1 \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-[x]} < 1+\frac{1}{x},$$

y por el teorema del emparedado

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-[x]} = 1.$$

Finalmente

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-[x]} = e.$$

Ejemplo 4.5.1 Calcular

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1}.$$

Tenemos

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1} = \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2}\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

y por las propiedades de límites se concluye que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = e^2.$$

Conclusión

La construcción que aquí presentamos no es muy común encontrarla en la literatura. A nivel de secundaria podría explotarse esta idea, usando expansiones decimales, y apoyándose en la calculadora. Para fijar ideas, supongamos que tenemos calculadoras C_1, C_2,..., C_n..., tales que C_n trabaja con n dígitos de exactitud. Si queremos calcular $2^{\sqrt{2}}$ con cierta exactitud, basta con escoger la calculadora C_n, con n suficientemente grande. Cuanto más grande sea n, mejor será la aproximación de $2^{\sqrt{2}}$ que se obtenga.

En general, si x $\in$ IR tiene expansión decimal

$$x = c_0,\ c_1 c_2 ...$$

esto quiere decir que para cada n $\in$ IN se tiene

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + ... + \frac{c_n}{10^n} \leq x \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + ... + \frac{c_n + 1}{10^n}.$$

Los números racionales $r_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + ... + \frac{c_n}{10^n} = c_0, c_1 c_2 ... c_n$ satisfacen

$$r_n \leq x \leq r_n + \frac{1}{10^n} = s_n.$$

Por ser la exponencial creciente para a > 1, tenemos $2^{r_n} \leq 2^x \leq 2^{s_n}$. Si por ejemplo podemos calcular 2^{r_n} y 2^{s_n}, y observamos que coinciden en los primeros veinte dígitos, entonces sabremos que esos son los primeros veinte dígitos en la expansión de 2^x.
Por ejemplo, tomemos

$$\sqrt{2} = 1.\ 414\ 213\ 562\ 373\ 095...$$

Entonces

r_{14} = 414 213 562 373 09,
s_{14} = 1. 414 213 562 373 09 + $\frac{1}{10^{14}}$ = 1. 414 213 562 373 1.

Calculando con una calculadora de 15 dígitos tenemos

$2^{r_{14}}$ = 2. 65 144 142 690 216...
$2^{s_{14}}$ = 2. 665 144 142 690 234...

Dado que estas expansiones coinciden en los primeros 13 dígitos decimales, tenemos que

$$2^{\sqrt{2}} = 2.\ 665\ 144\ 142\ 690\ 2...$$

Ejercicios

1. Calcule

   $\log_2 8$, $\log_9 3$, $\log_2 \frac{1}{2}$, $\log_{10}(0.0001)$.

2. Exprese de manera que no aparezca el símbolo log

   $$\log_2 2^n, \quad \log_2 9 + 4 \log_2 \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \log_3 (ab) - \log_3 (3a) - \log_3 (9b).$$

3. Halle los valores de x que satisfacen cada ecuación:

$$\log_3 x = 5, \quad \log_2(x+1) = -1, \quad \log_x 25 = 2.$$

4. Calcule

$$\left(\left(\sqrt{2} \right)^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}.$$

5. Recordando que $\sqrt{2} = 1.414\,213\,562\,3...$, ordene en orden creciente los siguientes números

$$2^{1.42},\ 2^{1.41},\ 2^{\sqrt{2}},\ 2^{1.412},\ 2^{1.4139}.$$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$\begin{array}{llll} \left(\sqrt{2}\right)^{x^2} = 2 & 3^{1-x^2} = 9^x & \left(2^{\sqrt{2}}\right)^x = 4 & \frac{3^x+2^x}{2^x+1} = 1 \\ \left(\sqrt{2}\right)^{x\sqrt{2}} = 2 & x^{\ln 2} = 2^{\ln x} & \frac{3^x-2^x}{2^x-1} = -1 & x^2 = 2^{\ln x} \end{array}$$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones:

    1. $\ln(x^2 + 1) = -x^2$,
    2. $e^{x^2} = 1 - x^2$,
    3. $e^x + e^{-x} = 2$,
    4. $e^x - e^{-x} = 4$.

8. Demuestre usando el lema 4.1.1, que $(ab)^x = a^x b^x$, para $a, b > 0$ y $x \in IR$.

9. Demuestre que $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$.

10. Si $a_n \to l$ y f es continua en l, demuestre que $f(a_n) \to f(l)$.

11. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, y F es una función continua en l, demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty} (F \circ f)(x) = F(l)$.

12. Demuestre que $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = 1$, para $a > 0$. Sug. Considere $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a$.

13. Demuestre que para $a \geq 0$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$. Sug. Para $k = \left[\frac{n}{a}\right]$ justifique las siguientes desigualdades:

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{ka} \leq \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{a(k+1)}.$$

Luego use los ejercicios 9 y 11, la continuidad de la función $f(x) = x^a$.

14. Use el ejercicio anterior, y la desigualdad de Bernoulli, para mostrar que $e^a \geq 1 + a, \forall a \in IR$.

15. Demuestre que $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$. Sug. Escriba $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^a$, donde $t = \frac{x}{a}$, y use el ejercicio 11 y la continuidad de la función $x \mapsto x^a$.

16. Demuestre que el resultado del ejercicio anterior sigue siendo válido para $a < 0$. Sug. Si $a = -b$, con $b > 0$, justifique lo siguiente:

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{b}{x-b}\right)^x\right]^{-1} \to \left(e^b\right)^{-1} = e^a.$$

17. Use la regla de L 'Hôpital, para mostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \text{ para todo } a \in IR.$$

18. Considere la sucesión $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Sabemos que $\lim x_n = e$.

(a)

Muestre que

$$x_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}, \forall n \geq 3,$$

usando la fórmula del binomio.

(b)

Use la parte **(a) para concluir que**

$$x_n \geq 2 + \sum_{k=2}^{m} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}, \forall n \geq m.$$

Luego tome el límite cuando $n \to \infty$ para obtener que

$$e \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}, \forall m \in IN.$$

(c)

Concluya del teorema de Weierstrass que la sucesión (S_m) definida por $S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$ es convergente, y que

$$\lim_{n \to \infty} S_m \leq e.$$

(d)

Use la parte (a) para mostrar que

$$x_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

y combine con la parte (c) para concluir que

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

19. Repita los pasos del ejercicio anterior, con $x_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$, para concluir que:

$$e^a = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \text{ para } a > 0.$$

Sug. Use la fórmula del binomio para justificar lo siguiente:

$$e^a = \lim\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \geq \lim \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{a^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!}.$$

Luego considere la sucesión (S_n) definida por $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$, con $a > 0$ fijo. Muestre que (S_n) es creciente y acotada superiormente, y concluya que (S_n) converge a cierto límite $S \leq e^a$. Usando la fórmula del binomio otra vez se tiene

$$x_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \to e^a,$$

y concluya que $S = e^a$.

20. Resuelva las siguientes ecuaciones. Use una gráfica cuando lo amerite, para dar una idea inicial

   1. $\ln x = \ln \frac{1}{x+1}$,
   2. $\ln x = x - 1$,
   3. $x^{e^x} = 1$,
   4. $(e^x)^{e^x} = 1$,
   5. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$,
   6. $\frac{e^{2x}-1}{5e^x-1} = 1$.

21. Si $f : IR \to R$ es continua, y $f(x) = a^x$ para todo $x \in IQ$, muestre que $f(x) = a^x$, para todo $x \in IR$.

22. Sea $f : IR \to R$ monótona y tal que $f(x) = a^x$, $\forall x \in IQ$, muestre que $f(x) = a^x$, $\forall x \in IR$.

23. Sea $f : IR \to R$, tal que $f(x + y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in IR$, y que $f(1) = a \neq 0$.

    1. Muestre que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in IR$ y que $f(0) = 1$.
    2. Muestre por inducción que $f(nx) = f(x)^n$, para $n \in IN$ y $x \in IR$.
    3. Concluya que $f(n) = a^n$, $\forall n \in IN$.
    4. Muestre que $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, $\forall x \in IR$.
    5. Use (b) y (c) para concluir que $f(r) = a^r$, $\forall r \in IQ$.
    6. Si f es monótona o continua, entonces $f(x) = a^x$, $\forall x \in IR$ (ver los ejercicios 21 y 22).

24. Sean $f, g : IR \to R$ continuas, y tales que $f(r) = g(r)$, $\forall r \in IQ$. Muestre que $f = g$ (esto es, $f(x) = g(x)$, $\forall x \in IR$).

25. Muestre que para $b > 1$, $b \in IN$, y $x \in [0, 1]$, existe una sucesión $(a_n)_{n \in IN}$, con $a_n \in \{0,...b - 1\}$, tal que $\frac{a_1}{b} +...+ \frac{a_n}{b^n} \leq x < \frac{a_1}{b} +...+ \frac{a_n}{b^n} + \frac{1}{b^n}$, $\forall n \in IN$. Cuando $b = 2$, (a_n) se llama la expansión binaria de x.

26. Sea $ID = \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in IZ, n \in IN \right\}$. Use el ejercicio anterior para mostrar que para todo $x \in IR$, existe una sucesión (r_n) en ID, creciente y tal que

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{2^n}, \forall n \in IN.$$

    Además, para $s_n = r_n + \frac{1}{2^n}$ se tiene que (s_n) es decreciente.

27. Repita los ejercicios 21, 22 y 24, con ID en vez de IQ.

28. Para todo $x \in IR$, existen dos sucesiones (τ_n) y (σ_n) de irracionales, tales que (τ_n) es creciente, (σ_n) es decreciente, y $\tau_n \leq x \leq \sigma_n$, para cada n. Sug. Considere la expansión decimal (o binaria, como en el ejercicio 26) de $\frac{x}{\sqrt{2}}$.

29. Calcule

    1. $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{a^2}{n^2} \right)^n$ (sug. $e^a \cdot e^{-a} = 1$).

2. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n^2}$,

3. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{n}$, etc.

30. Hallar el dominio máximo para las siguientes funciones:

1. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$
2. $g(x) = \ln(x - 1) + \ln(x + 3)$
3. $h(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln(x+3)}$
4. $\ln(x - 1)^2$
5. $2 \ln(x - 1)$
6. $\sqrt{\ln(x-1)^2}$
7. $F(x) = \sqrt{1-e^x} + \sqrt{a}$
8. $G(x) = \ln\sqrt{x^2-1} + \sqrt{\ln(x^2-1)}$
9. $J(x) = \frac{1}{e^x-2}\sqrt{1-e^x}$
10. $k(x) = \frac{1}{e^x-2}\sqrt{e^x-1}$
11. $H(x) = \ln(1 - \sqrt{x^2-1})$
12. $L(x) = \sqrt{1-\sqrt{\ln x - 1}}$
13. $M(x) = \ln(\ln(\ln(\ln x)))$.

31. Sea $x_n = a^n$, con $a > 1$. Demuestre que $x_n \to \infty$. ¿Qué pasa si $0 < a < 1$?

32. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, si $a > 1$.

33. Calcular:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$. Sug. El límite coincide con la derivada de $f(x) = e^x$, en $x = 0$.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x}$ .Sug. Use la parte (a).

34. Para $0 \leq x \leq 1$, demuestre que

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + ex^3.$$

Sug. Recuerde que $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + x + ... + \frac{x^n}{n!} \right)$. Además, para $n \geq 3$ se tiene

$$\frac{x^3}{3!} ... + \frac{x^n}{n!} = x^3 \left(\frac{1}{3!} + ... + \frac{x^{n-3}}{n!} \right) < ex^3.$$

35. Use el ejercicio anterior para demostrar que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

36. Derive las siguientes funciones

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 1 \right), \; g(x) = \left(e^{x^2 + e^x} \right)^x, \; h(x) = x^x,$$

$$j(x) = \left(\ln x \right)^{\ln x}, \; l(x) = \left(\cos x \right)^{x \ln x}.$$

37. Calcule las siguientes integrales indefinidas

$$\int x e^{x^2} dx \quad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} \quad \int \frac{dx}{e^x + 1}$$

38. Las funciones hiperbólicas se definen por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

y luego

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \; \coth x = \frac{1}{\tanh x}.$$

Calcule las derivadas de cada una de estas funciones.

39. Recuerde que

$$e^x = \left(\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}, \forall m \in IN.$$

Use esto para mostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{p(x)} = +\infty, \tag{4.4}$$

para todo polinomio $p(x)$.

40. En este ejercicio demostramos (4.4) de otra manera.

1. Muestre que si $r > 1$ se tiene $\lim_{x\to\infty} \frac{r^x}{x} = \infty$. Sug. Siendo $r = 1 + \varepsilon$, use el ejercicio 14 para concluir que

$$r^n > \frac{n(n-1)}{2}\,\varepsilon^2.$$

Luego, si $n = [\,x\,]$ tenemos

$$r^x \geq r^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\,\varepsilon^2 \geq \frac{(x-1)(x-2)}{2}\,\varepsilon^2.$$

2. Si $r > 1$ y $p \in IR$, muestre que $\lim_{x\to\infty} \frac{r^x}{x^p} = \infty$. Sug. Si $p \leq 0$ se tiene $\frac{r^x}{x^p} \geq r^x$, para $x \geq 1$. Si $p > 0$ entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{r^x}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{r^{x/p}}{x} \right)^p,$$

y use el ejercicio anterior con $r^{1/p}$ en vez de r.

3. Use el ejercicio anterior para mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{r^x} = 0,$$

para cualquier polinomio $P(x)$, y cualquier $r > 1$ (Cualquier exponencial de base mayor que 1, crece más rápido que cualquier polinomio). Note que esto es lo mismo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^{\alpha x}} = 0,\ \forall\, \alpha > 0.$$

41. Use el ejercicio anterior para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{P(x)} = 0,$$

para cualquier polinomio $P(x)$, y cualquier $\beta \in IR$ (el logaritmo crece mucho más lento que cualquier potencia). Sug. Haga el cambio de variable $t = \ln x$.

42. En este ejercicio se demuestra que e es irracional.

1. Sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Demuestre que para $n > m$ se tiene

$$S_m < S_n = S_m + \frac{1}{(m+1)!}\left[1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots\right]$$

$$< S_m + \frac{1}{(m+1)!}\left[1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots\right].$$

2. Concluya que $S_m < S_n < S_m + \frac{1}{m\,m!}$, si $n > m$. Haga $n \to \infty$ para obtener

$$S_m \leq e \leq S_m + \frac{1}{m\,m!},\ \forall m \in IN.$$

3. Tome $m = 10$, y use una calculadora de bolsillo para deducir que $e = 2.7182818$....Con $n = 20$, y una calculadora más eficiente, se obtiene $e = 2.71828182845904523 53$...

4. Suponga que $e = \frac{p}{m}$, con $p, m \in IN$. Use este m en la estimación de arriba, y multiplique por $m!$ para obtener

$$m!\,S_m \leq p(m-1)! \leq m!\,S_m + \frac{1}{m}.$$

Como $m!\,S_m$ es un entero, esto es una contradicción. Por lo tanto e es irracional.

43. Sea $f: IR \to IR$ una función derivable, tal que $f'(x) = f((x)$, para todo $x \in IR$. Demuestre que existe $C \in IR$ tal que $f(x) = Ce^x$, $\forall x \in IR$. Sug. Derive la función $g(x) = f(x)e^x$.

Bibliografía

1. Bartle, R.G. & D.R. Sherbert. *Introducción al Análisis Matemático de una Variable.* Limusa, 1996.
2. Bourbaki, N. *Éléments d´histoire des Mathématiques,* Paris, Hermann, 1969.
3. Cambronero, S. *Apuntes de curso MA0350.* 1996.
4. Courant, R. & F. John. *Introduction to Calculus and Analysis.* Vol. I. Springer-Verlag, N.Y. 1989.
5. Duarte, A. & S. Cambronero. *Apuntes del curso MA0250.* 1999.
6. Eves, H. *An Introduction to the History of Mathematics.* 3rd ed. NY 1961.
7. Pedrick, G. *A first Course in Analysis.* Springer-Varlag, N.Y. 1994.
8. Pownall, M.W. *Real Analysis. A first course with foundations.* WCB Publishers, 1994.
9. Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis.*McGraw-Hill. 2da. edición. 1966.
10. Sprecher, D.A. *Elements of Real Analysis.* Dover Pub. Inc. New York, 1970.