Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 15, No 2. Marzo − Agosto 2015. ISSN 1659 -0643

La solución de algunas EDO de Riccati

José Alfredo Jiménez Moscoso
josajimenezm@unal.edu.co
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

Recibido: Julio 12, 2014 Aceptado: Octubre 30, 2014

Resumen. En este artículo, se presenta un enfoque nuevo y eficaz para determinar la solución general de la ecuación diferencial no lineal de Riccati cuando los coeficientes son variables y están relacionados entre sí mediante otra ecuación diferencial ordinaria. La ecuación de Riccati se convierte de una vez a una ecuación diferencial ordinaria de Bernoulli y tiene la ventaja que no se necesita conocer a priori una solución particular. Estos métodos de solución permiten explicar este tipo de EDO de manera sencilla en las aulas.

Palabras clave: Ecuación de Riccati, Ecuación de Bernoulli, Ecuaciones no lineales.

Abstract. In this paper we present a new and effective approach to determine the solution general of Riccati's Nonlinear Differential Equation when the coefficients are variable and are interconnected by another Ordinary Differential Equation. The Riccati equation becomes once to a Bernoulli's ordinary differential equation and has the advantage that it is not necessary to know a priori a particular solution. These methods of solution allows to explain this kind of differential equation in a simple way in the classroom.

KeyWords: Riccati equation, Bernoulli equation, Nonlinear Equations.

1.1 Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de Riccati es una clase de ecuación diferencial no lineal de gran importancia, y juega un papel importante en muchos campos de la ciencia aplicada, este tipo de

EDO aparece en problemas clásicos de cálculo de variaciones, y en disciplinas asociadas con control óptimo y programación dinámica, (veáse [8, 1]). Por lo general, una EDO no lineal de la forma

$$A(x) f'(x) = B(x)(f(x))^2 + C(x) f(x) + D(x), \tag{1.1}$$

donde los coeficientes variables $A(x), B(x), C(x)$ y $D(x)$ son funciones arbitrarias de x con $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$, se denomina EDO de Riccati y para resolverla se necesita conocer a priori una solución particular de la ecuación 1.1. La forma más conocida consiste en dividir la EDO 1.1 entre $A(x)$ y escribirla en su forma clásica:

$$f'(x) = P(x)(f(x))^2 + Q(x) f(x) + R(x). \tag{1.2}$$

A pesar que en [6] se presentan varias transformaciones que permiten linealizar la EDO de Riccati y para algunos casos determinar la solución general de dicha EDO, en la mayoría de textos de EDO estas transformaciones no son presentadas y el enfoque de solución general que presentan de este tipo de EDO es usando la transformación convencional:

$$f(x) = \phi_1(x) + z(x),$$

donde $\phi_1(x)$ es una solución particular de la ecuación 1.1 este cambio de variable transforma la EDO de Ricatti en una EDO que se puede resolver con facilidad (veáse [3, 7, 4]).

La idea principal del artículo es ofrecer un nuevo enfoque para obtener la solución general de algunas EDO de Riccati, además, mostrar e impulsar el uso de esta ecuación diferencial entre ingenieros en ejercicio y estudiantes de Ingeniería. Para utilizar el método de solución propuesto se debe satisfacer alguna de las cuatro condiciones dadas en este trabajo, y cuando se verifica alguna de ellas la EDO de Riccati puede solucionarse convirtiéndola de una vez en una EDO de Bernoulli, esta última EDO se resuelve usando los métodos conocidos, la metodología propuesta tiene la ventaja que no se necesita conocer a priori una solución particular para resolver la EDO de Riccati como en el método tradicional. El artículo esta distribuido de la siguiente manera: en la sección 1.2 se presenta los métodos propuestos, en la sección 1.3 se ilustra la metodología con unos ejemplos y en el apéndice se presentan las demostraciones de los métodos propuestos.

1.2 Métodos propuestos

Los métodos que se proponen para establecer una solución de la EDO no lineal dada en 1.1 con coeficientes variables, se resumen en los teoremas que se presentan a continuación:

Teorema 1.1

Si los coeficientes de la EDO no lineal dada en 1.1 están relacionados mediante la siguiente expresión

$$D\left(x\right)=-A\left(x\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{C\left(x\right)}{B\left(x\right)}\right] \tag{1.3}$$

entonces la solución general viene dada por

$$f\left(x\right)=-\frac{C\left(x\right)}{B\left(x\right)}+\nu(x)\left[E-\int\frac{B\left(x\right)}{A\left(x\right)}\nu(x)\mathrm{d}x\right]^{-1}$$

donde la función $\nu(x)=\exp\left\{-\int\frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}$ y $E\in\mathbb{R}$. Una solución particular de esta EDO es $f_1\left(x\right)=-\frac{C(x)}{B(x)}$.

Demostración. Los detalles de la prueba se pueden consultar en el apéndice.

Teorema 1.2

Si los coeficientes de la EDO no lineal dada en 1.1 satisfacen la siguiente expresión

$$B\left(x\right)=A\left(x\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{C\left(x\right)}{D\left(x\right)}\right] \tag{1.4}$$

entonces el inverso de la solución general viene dado por

$$\frac{1}{f\left(x\right)}=-\frac{C\left(x\right)}{D\left(x\right)}+\nu(x)\left[E+\int\frac{D\left(x\right)}{A\left(x\right)}\nu(x)\mathrm{d}x\right]^{-1}$$

donde la función $\nu(x)=\exp\left\{\int\frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}$ y $E\in\mathbb{R}$.

Demostración. Los detalles de la prueba se pueden consultar en el apéndice.

Teorema 1.3

Si los coeficientes de la EDO no lineal dada en 1.1 satisfacen la siguiente expresión

$$-2\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}} = \frac{A(x)}{B(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left\{\int \frac{B(x)}{A(x)}\nu(x)\mathrm{d}x\right\}\right], \tag{1.5}$$

donde $\nu(x) = \exp\left\{\int \frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}$ entonces la solución general viene dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\left[1 + \left[E - \int \frac{B(x)}{A(x)}\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\mathrm{d}x\right]^{-1}\right].$$

donde $E \in \mathbb{R}$. Una solución particular de esta EDO es $f_1(x) = \sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}$.

Demostración. Los detalles de la prueba se pueden consultar en el apéndice.

Teorema 1.4

Si los coeficientes de la EDO no lineal dada en 1.1 satisfacen la siguiente expresión

$$2\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}} = \frac{A(x)}{D(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left\{\int \frac{D(x)}{A(x)}\nu(x)\mathrm{d}x\right\}\right], \tag{1.6}$$

donde $\nu(x) = \exp\left\{-\int \frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}$ entonces el inverso de la solución general viene dado por

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\left[1 + \left[E + \int \frac{D(x)}{A(x)}\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\mathrm{d}x\right]^{-1}\right].$$

donde $E \in \mathbb{R}$. Una solución particular de esta EDO es $f_1(x) = \sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}$.

Demostración. Los detalles de la prueba se pueden consultar en el apéndice.

1.3 Ilustración

En esta sección, se aplican los métodos presentados para encontrar la solución general de algunas EDO no lineales de Riccati dadas en [2, cap. 2].

Ejemplo 1.1

Encuentre la solución general de la EDO no lineal

$$y' = -xy^2 + x^2y + 1$$

Solución: En este caso se satisface la EDO dada en 1.3 ya que

$$D(x) = -\frac{d}{dx}(-x).$$

Luego, la EDO no lineal se puede reescribir como

$$\frac{d}{dx}(y - x) = -xy(y - x),$$

haciendo el cambio de variable $u = y - x$, se llega a

$$\frac{du}{dx} = -xu(u + x)$$

Esta nueva EDO se puede reescribir como

$$\frac{du}{dx} + ux^2 = -u^2x$$

la cual corresponde a una EDO de Bernoulli y su solución viene dada por

$$u = \frac{e^{-\frac{1}{3}x^3}}{\int xe^{-\frac{1}{3}x^3}\,dx + C_2}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = x + \frac{e^{-\frac{1}{3}x^3}}{\int xe^{-\frac{1}{3}x^3}\,dx + C_2}$$

nótese que $y_1 = x$ es una solución particular.

Ejemplo 1.2

Encuentre la solución de la EDO no lineal

$$y' = y^2 - (\operatorname{sen} x)\, y + \cos x$$

Solución: En este caso se satisface la EDO dada en 1.3 ya que

$$D(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\operatorname{sen} x).$$

Luego, la EDO se puede reescribir como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y - \operatorname{sen} x) = y(y - \operatorname{sen} x)$$

haciendo el cambio de variable $u = y - \operatorname{sen} x$, se llega a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u(u + \operatorname{sen} x).$$

Esta nueva EDO se puede reescribir como

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u \operatorname{sen} x = u^2$$

la cual corresponde a una EDO de Bernoulli y su solución viene dada por

$$u = \frac{e^{-\cos x}}{C_2 - \int e^{-\cos x}\, \mathrm{d}x}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = \operatorname{sen} x + \frac{e^{-\cos x}}{C_2 - \int e^{-\cos x}\, \mathrm{d}x}$$

nótese que $y_1 = \operatorname{sen} x$ es una solución particular.

Ejemplo 1.3

Encuentre la solución general de la EDO no lineal

$$y' = \alpha \operatorname{sen}(\alpha x)\, y^2 + \cos(\alpha x)\, y - 1$$

Solución: En este caso se satisface la EDO dada en 1.4 ya que

$$B(x) = \alpha \operatorname{sen}(\alpha x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cos(\alpha x)),$$

luego al dividir por y^2 se obtiene

$$\frac{y'}{y^2} = \alpha \operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\alpha x)\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}$$

usando el cambio de variable $u = \frac{1}{y}$

$$-u' = \alpha \operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\alpha x)\,u - u^2.$$

la EDO no lineal se puede reescribir como

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u - \cos(\alpha x)) = -u\,(u - \cos(\alpha x))$$

haciendo el cambio de variable $v = u - \cos(\alpha x)$ se llega a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v = v\,(v - \cos(\alpha x))$$

La solución de esta EDO de Bernoulli es

$$v = \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x)}}{E - \int e^{-\frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x)}\,\mathrm{d}x}$$

Por lo tanto,

$$u = \cos(\alpha x) + \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x)}}{E - \int e^{-\frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x)}\,\mathrm{d}x}$$

y la solución general de la EDO no lineal es $y = \dfrac{1}{u}$. Nótese que una solución particular es

$$y_1 = \frac{1}{\cos(\alpha x)}.$$

Ejemplo 1.4

Encuentre la solución general de la EDO no lineal

$$xy' = xy^2 - \left(4x^2 - 1\right)y + 4x^3$$

Solución: En este caso se satisface la EDO dada en 1.5 luego la EDO no lineal se puede reescribir como

$$xy' = x\left(y - 2x\right)^2 + y,$$

haciendo el cambio de variable $u = y - 2x$, se llega a

$$x\left(u' + 2\right) = xu^2 + \left(u + 2x\right).$$

Esta nueva EDO se puede reescribir como

$$xu' - u = u^2 x$$

la cual corresponde a una EDO de Bernoulli y su solución viene dada por

$$u = \frac{2x}{C_2 - x^2}.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = 2x + \frac{2x}{C_2 - x^2}$$

nótese que $y_1 = 2x$ es una solución particular.

1.4 Conclusiones

Aunque para las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales no existen métodos generales de solución, los métodos presentados en este artículo permiten determinar de manera exacta la solución general de algunas EDO de Riccati cuando no se conoce a priori una solución particular y los coeficientes de esta EDO no lineal satisfacen algunas de las condiciones establecidas en este artículo. En trabajos futuros se desea presentar algoritmos de programación numérica en MatLab usando los métodos de solución presentados en este trabajo para resolver las EDOs no lineales de Riccati.

Agradecimientos. El autor agradece los comentarios y sugerencias de los evaluadores asignados por la Revista digital Matemática, Educación e Internet a la versión inicial de este artículo, ya que permitieron mejorar y clarificar la notación y metodología propuesta en este artículo.

Bibliografía

[1] Reid, William Thomas. *"Riccati differential equations"*. Academic Press. 1972.

[2] Rainville, Earl David. *"Intermediate Course in Differential Equations."* John Wiley & Sons. 1943

[3] Boyce, W. E., and DiPrima, R. C. *"Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems"*. John Wiley & Sons . 1997.

[4] Simmons, George F. *"Differential Equations with Applications and Historical Notes"*. McGraw-Hill. 1991.

[5] Zwillinger, Daniel. *"Handbook of Differential Equations"*. Academic Press.1997.

[6] Sugai, Iwao. A class of solved Riccati's equations. Electrical Communication. Vol 37, N 1. 1961.

[7] Nagle, R. Kent, and Saff, Edward B., and Snider, Arthur David. *"Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems."* Addison-Wesley. 2012.

[8] Murphy, George Moseley. *"Ordinary differential equations and their solutions"*. Van Nostrand Reinhold Company. 1960

Apéndice: Prueba de los teoremas propuestos.

Demostración (**Teorema1.1**). Si los coeficientes satisfacen la expresión 1.3 entonces la EDO no lineal dada en 1.1 se puede reescribir como

$$\begin{aligned} A(x)\,f'(x) + A(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{C(x)}{B(x)}\right] &= B(x)\,(f(x))^2 + C(x)\,f(x) \\ A(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x) + \frac{C(x)}{B(x)}\right] &= B(x)\,f(x)\left[f(x) + \frac{C(x)}{B(x)}\right], \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable

$$y(x) = f(x) + \frac{C(x)}{B(x)} \tag{1.7}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} A(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) &= B(x)\left[y(x) - \frac{C(x)}{B(x)}\right]y(x) \\ &= B(x)\,(y(x))^2 - C(x)\,y(x) \end{aligned}$$

esta nueva EDO no lineal se puede reescribir como sigue

$$A(x)\,\frac{y'(x)}{(y(x))^2} + C(x)\,\frac{1}{y(x)} = B(x),$$

la cual corresponde a una EDO de Bernoulli. Entonces haciendo el cambio de variable

$$u(x) = -\frac{1}{y(x)} \qquad \text{y} \qquad u'(x) = \frac{y'(x)}{(y(x))^2}$$

la EDO se convierte en

$$A(x)\,u'(x) - C(x)\,u(x) = B(x)\,.$$

Esta EDO es lineal y usando el factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left\{-\int \frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}$$

se llega a la siguiente solución

$$u(x) = \exp\left\{\int \frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}\left[\int \frac{B(x)}{A(x)}\exp\left\{-\int \frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x + E^*\right].$$

Luego

$$y(x) = \exp\left\{-\int \frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}\left[E - \int \frac{B(x)}{A(x)}\exp\left\{-\int \frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x\right]^{-1},$$

donde $E \in \mathbb{R}$ y sustituyendo en 1.7 se tiene lo que se quería demostrar.

Demostración (**Teorema 1.2**) Si los coeficientes satisfacen la expresión 1.4 entonces al dividir la EDO no lineal dada en 1.1 por $(f(x))^2$ s

$$A(x)\,\frac{f'(x)}{(f(x))^2} = B(x) + C(x)\,\frac{1}{f(x)} + D(x)\,\frac{1}{(f(x))^2}$$

haciendo el cambio de variable

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

la EDO no lineal se convierte en

$$-A(x)\,g'(x) = D(x)\,(g(x))^2 + C(x)\,g(x) + B(x)\,.$$

De manera análoga a la metodología usada en el Teorema anterior, la EDO no lineal dada en 1.1 se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
-A(x)\,g'(x) - A(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{C(x)}{D(x)}\right] &= D(x)\,(g(x))^2 + C(x)\,g(x)\\
-A(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[g(x) + \frac{C(x)}{D(x)}\right] &= D(x)\,g(x)\left[g(x) + \frac{C(x)}{D(x)}\right],
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable

$$y(x) = g(x) + \frac{C(x)}{D(x)} \tag{1.8}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}-A(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) =& D(x)\left[y(x)-\frac{C(x)}{D(x)}\right]y(x)\\ =& D(x)(y(x))^2 - C(x)y(x),\end{aligned}$$

esta última EDO no lineal se puede reescribir como sigue

$$-A(x)\frac{y'(x)}{(y(x))^2}+C(x)\frac{1}{y(x)}=D(x)$$

la cual corresponde a una EDO de Bernoulli. Haciendo el cambio de variable

$$u(x)=\frac{1}{y(x)} \qquad \text{y} \qquad u'(x)=-\frac{y'(x)}{(y(x))^2}$$

la EDO se convierte en

$$A(x)u'(x)+C(x)u(x)=D(x)$$

usando el factor integrante

$$\mu(x)=\exp\left\{\int\frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}$$

se llega a la siguiente solución

$$u(x)=\exp\left\{-\int\frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}\left[\int\frac{D(x)}{A(x)}\exp\left\{\int\frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x+E^*\right]$$

luego

$$y(x)=\exp\left\{\int\frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}\left[E+\int\frac{D(x)}{A(x)}\exp\left\{\int\frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x\right]^{-1},$$

donde $E\in\mathbb{R}$, sustituyendo en 1.8 se tiene lo que se quería demostrar.

Demostración (**Teorema1.3**) Si los coeficientes satisfacen la expresión 1.5 entonces la EDO no lineal dada en 1.1 se puede reescribir como

$$\begin{aligned}A(x)f'(x) =& B(x)\left[(f(x))^2+\frac{D(x)}{B(x)}\right]+C(x)f(x)\\ =& B(x)\left[f(x)-\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\right]^2+C(x)f(x)+2\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}B(x)f(x),\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable

$$y(x)=f(x)-\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}, \tag{1.9}$$

se obtiene que

$$A(x)\left[y'(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\right]=B(x)(y(x))^2+C(x)\left[y(x)+\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\right]$$
$$+2\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}B(x)\left[y(x)+\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\right],$$

después de algunas operaciones y simplificando se llega a

$$A(x)\,y'(x)=B(x)(y(x))^2+\left[C(x)-2B(x)\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\right]y(x)$$

esta nueva EDO no lineal se puede reescribir como sigue

$$A(x)\frac{y'(x)}{(y(x))^2}-\left[C(x)+2B(x)\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\right]\frac{1}{y(x)}=B(x),$$

la cual corresponde a una EDO de Bernoulli. Entonces haciendo el cambio de variable

$$u(x)=-\frac{1}{y(x)} \qquad \text{y} \qquad u'(x)=\frac{y'(x)}{(y(x))^2}$$

la EDO se convierte en

$$A(x)\,u'(x)+\left[C(x)+2B(x)\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\right]u(x)=B(x).$$

Esta EDO es lineal y usando el factor integrante

$$\mu(x)=\exp\left\{\int\frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x\right\}\exp\left\{2\int\frac{B(x)}{A(x)}\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\,\mathrm{d}x\right\},$$

al sustituir la expresión 1.5 se llega a

$$\mu(x)=2\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}},$$

por lo tanto, se obtiene la siguiente solución

$$u(x)=\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\left[\int\frac{B(x)}{A(x)}\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\,\mathrm{d}x+E^*\right].$$

Luego

$$y(x)=\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\left[E-\int\frac{B(x)}{A(x)}\sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\mathrm{d}x\right]^{-1},$$

donde $E\in\mathbb{R}$ y sustituyendo en 1.9 se tiene lo que se quería demostrar.

Demostración (Teorema1.4) Si los coeficientes satisfacen la expresión 1.6 entonces al dividir la EDO no lineal dada en 1.1 por $(f(x))^2$ se llega a

$$A(x)\frac{f'(x)}{(f(x))^2} = B(x) + C(x)\frac{1}{f(x)} + D(x)\frac{1}{(f(x))^2}$$

haciendo el cambio de variable

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

la EDO no lineal se convierte en

$$-A(x)g'(x) = D(x)(g(x))^2 + C(x)g(x) + B(x).$$

Esta última EDO no lineal se puede reescribir como

$$\begin{aligned}-A(x)g'(x) &= D(x)\left[(g(x))^2 + \frac{B(x)}{D(x)}\right] + C(x)g(x)\\ &= D(x)\left[g(x) - \sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\right]^2 + C(x)g(x) + 2\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}D(x)g(x),\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable

$$y(x) = g(x) - \sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}, \tag{1.10}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}-A(x)\left[y'(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\right] &= D(x)(y(x))^2 + C(x)\left[y(x) + \sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\right]\\ &\quad + 2\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}D(x)\left[y(x) + \sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\right],\end{aligned}$$

después de algunas operaciones y simplificando se llega a

$$-A(x)y'(x) = D(x)(y(x))^2 + \left[C(x) + 2D(x)\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\right]y(x)$$

esta nueva EDO no lineal se puede reescribir como sigue

$$-A(x)\frac{y'(x)}{(y(x))^2} - \left[C(x) + 2D(x)\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\right]\frac{1}{y(x)} = D(x),$$

la cual corresponde a una EDO de Bernoulli. Entonces haciendo el cambio de variable

$$u(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad \text{y} \qquad u'(x) = -\frac{y'(x)}{(y(x))^2}$$

la EDO se convierte en

$$A(x)\,u'(x) - \left[C(x) + 2D(x)\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\right]u(x) = D(x).$$

Esta EDO es lineal y usando el factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left\{-\int \frac{C(x)}{A(x)}\mathrm{d}x - 2\int \frac{D(x)}{A(x)}\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\,\mathrm{d}x\right\},$$

al reemplazar la expresión 1.6 se llega a

$$\mu(x) = 2\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}},$$

por lo tanto, se obtiene la siguiente solución

$$u(x) = \sqrt{\frac{D(x)}{B(x)}}\left[\int \frac{D(x)}{A(x)}\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\,\mathrm{d}x + E\right].$$

Luego

$$y(x) = \sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\left[E + \int \frac{D(x)}{A(x)}\sqrt{\frac{B(x)}{D(x)}}\mathrm{d}x\right]^{-1},$$

donde $E \in \mathbb{R}$ y sustituyendo en 1.10 se tiene lo que se quería demostrar.