Una sombra en Liberia

Luis A. Acuña

Don Gerardo mira hacia afuera por la ventana del aula, sonriendo satisfecho. A sus espaldas, los estudiantes discuten animadamente. Y la discusión es nada menos que sobre... Matemáticas.

Bien se dice que cuando los estudiantes encuentran la Matemática relevante querrán involucrarse. Es difícil mantenerlos interesados con problemas abstractos sobre cuerdas, polinomios, cosenos o potencias fraccionarias. Ellos no ven cómo se relaciona eso con sus vidas, y tienen razón. Pero cuando don Gerardo se enteró de cómo se calculó una de las primeras aproximaciones a la circunferencia de la Tierra, quiso traer el problema al aula, adaptado al contexto nacional. Por eso hace unos minutos escribió en la pizarra el siguiente problema:

> En un momento en que los rayos del sol son verticales en San José, un poste vertical de 6 m de altura proyecta una sombra de 16 cm en Liberia, a 170 km de San José. Calcular la circunferencia de la Tierra.

Al principio los estudiantes se volvieron a ver unos a otros. ¿Está loco el profe? ¿Qué tiene que ver una cosa con la otra? Don Gerardo no les hizo caso, y antes de empezar el trabajo matemático les hizo una pregunta de cultura general, buscando conectar su materia con la Geografía:

-¿Es cierto que los rayos de sol pueden ser verticales?

Algunos estudiantes pensaron, ``Claro, a mediodía'', pero no se atrevieron a decirlo. Si Donge lo preguntó es porque la respuesta no es tan obvia. Como nadie contestaba, el profesor los guió, preguntando si alguien sabía sobre los equinoccios, los solsticios y los trópicos. Algunos estudiantes sabían algo, pero hubo que animarlos para que contestaran. Al final, don Gerardo terminó dando la mayor parte de la explicación. En resumen, hay dos momentos del año en los que los rayos del sol son verticales sobre el paralelo 10º Norte (que pasa a pocos kilómetros de San José): a mediados de abril y a finales de agosto.

Luego de eso, don Gerardo les pidió a sus alumnos que pensaran y conversaran sobre el problema, y se fue a mirar por la ventana. Ahora regresa a la pizarra, les muestra el gráfico en la Figura 1 y les pregunta:

-¿Qué está mal en este dibujo?

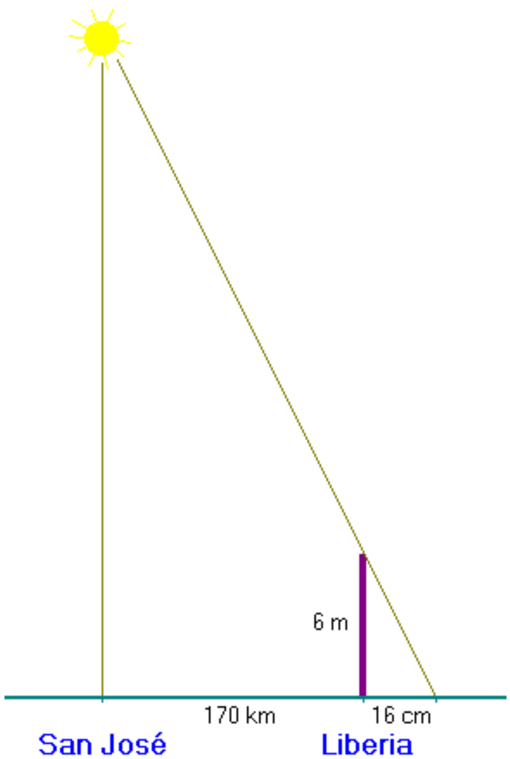

Figura 1

Las respuestas no se hacen esperar:

-Que Liberia está del otro lado -dice Álvaro, y el resto de la clase se ríe. Es cierto: en los mapas Liberia está más bien a la izquierda de San José. Pero eso no es importante en este problema.

-La distancia de San José a Liberia es como 220 km -dice Eduardo, que ha hecho el viaje varias veces.

-Sí, pero eso es por carretera, con todas las curvas -aclara Victoria-. Los 170 km del problema deben de ser en línea recta.

-De todos modos, Donge, la escala no puede estar bien -dice Andrea-. Si esa distancia horizontal son 170 km, ese poste parece que mide como 100 km de alto, no seis metros. Y la sombra como 50 km.

-Sí, pero se supone... -dice Victoria, sin completar la oración.

Andrea tiene un buen punto. Don Gerardo debe hacer la aclaración de que el dibujo no necesita estar a escala mientras los cálculos sean los correctos.

-¿Y qué hay del sol? -les pregunta.

Los estudiantes no habían pensado en eso. Álvaro baja la ceja izquierda y levanta la derecha mientras estudia el gráfico. Andrea insiste en la escala:

-El sol no puede estar tan cerca como en el dibujo. El sol está lejísimos. Además, San José está a más altura sobre el nivel del mar que Liberia.

-¡Ajá! -dice don Gerardo-; nos estamos acercando. Lo de la altura sobre el nivel del mar no importa, porque bastaría con dibujar San José un poco más alto y eso no altera lo demás. Pero el asunto del sol sí es importante: si el sol está tan lejos, ¿cómo llegan a la Tierra sus rayos?

-Como en ocho minutos -dice Eduardo-, porque la luz viaja a 300000 km por segundo.

-Bueno, sí -dice el profesor impaciente-. Pero quiero decir, ¿cómo son los rayos del sol al llegar a la Tierra?

-Ah, ¿verticales? -pregunta el mismo Eduardo.

-Pues sí -dice Carlos-, porque el problema lo dice, pero eso es en San José. ¿Más bien no deberían ser paralelos?

-¡Exacto! -exclama don Gerardo, empezando a ver la luz al final del túnel-. El sol es tan grande en comparación con la tierra, y está tan lejos, que un gran error en el primer dibujo es poner el sol como un punto. En realidad el siguiente dibujo es más real -y les hace en la pizarra un dibujo como el de la Figura 2.

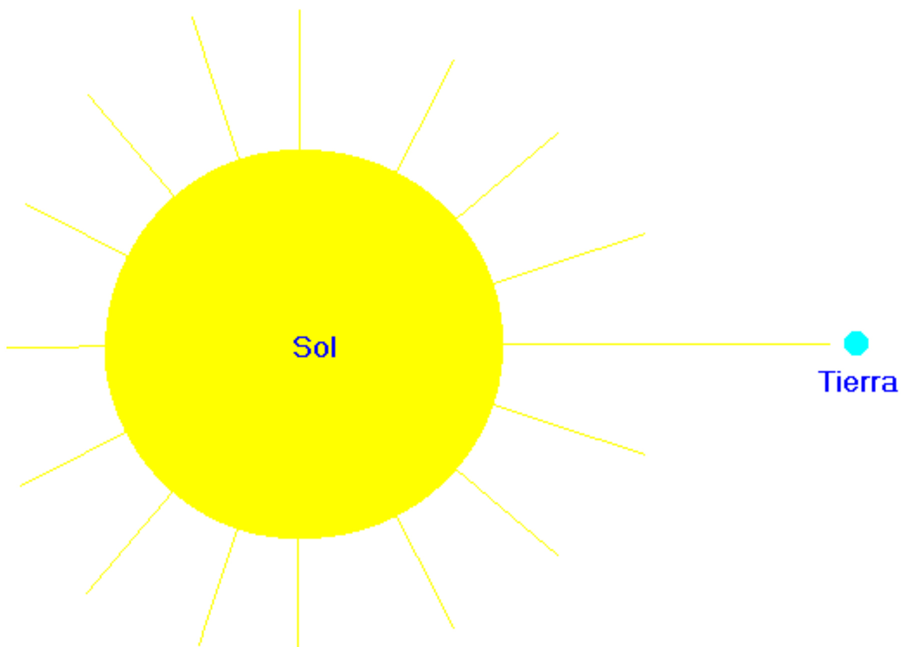

Figura 2

-¡Hey, pero si los rayos del son son paralelos, entonces también tienen que ser verticales sobre Liberia! -protesta Álvaro, que tenía rato de estar callado.

-No puede ser, porque en Liberia el poste hace sombra -dice Carlos-. Ah, ¿y no es por la curvatura de la Tierra?

-Claro, eso es -dice don Gerardo aliviado-. Si todo este problema es acerca de encontrar la circunferencia de la Tierra, ¿cómo se les olvidó considerar la curvatura? Claro, el otro error en el primer dibujo era que la Tierra tenía que ser curva. La situación es más bien así -y ahora muestra el dibujo en la Figura 3.

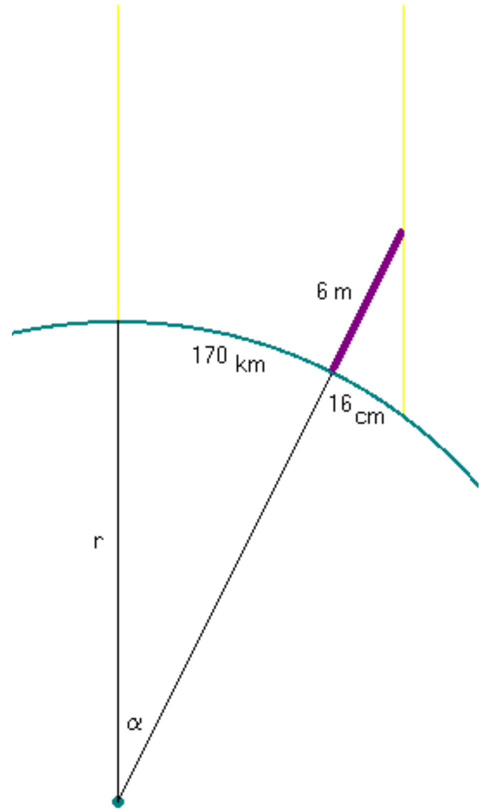

Figura 3

-Ahora vamos a los cálculos -continúa Donge-. Para averiguar la circunferencia necesitamos el radio de la Tierra. Y como conocemos la longitud del arco de San José a Liberia, que es $S = 170$, basta con encontrar el ángulo central α y despejar r en la fórmula $S = \alpha r$. ¿Pero cómo encontramos α?

Hay una pausa mientras los estudiantes lo piensan.

-¿El triángulo entre los dos radios y el lado de San José a Liberia es rectángulo? -pregunta Victoria-. Ay, no, más bien es isósceles, ¿verdad?

-¡Nombre, Vicky, eso ni siquiera es un triángulo! ¿No ves que el lado de arriba es curvo?

-Sí es cierto. Pero en alguna parte hay que usar un triángulo. ¡Ah, bueno! Ahí está el triángulo con el poste en Liberia. ¿O la base también es curva?

Ese sí es un triángulo, aclara el profesor. La base es tan corta, de apenas 16 cm, que sí puede considerarse un segmento recto. De todos modos la base es la sombra, que se proyecta sobre una acera, calle o alguna superficie prácticamente recta y horizontal.

-Entonces podemos resolver ese triángulo, ¿verdad? -dice Andrea-. Porque el ángulo entre el suelo y el poste es de 90º.

-Pero aún así -pregunta Carlos-, ¿cómo averiguamos el ángulo que hace falta, el del centro de la Tierra?

Hay una pausa. Luego:

-¡Hey! -dice Victoria, que tenía tiempo de estar pensando en silencio. Pero ahora no sabe qué más decir. Después de otro momento de silencio continúa: -¿El ángulo en la punta de arriba del poste no es igual a α?

-Se parecen, ¿pero por qué iguales? -dice Eduardo. Todos vuelven a ver a Victoria, que parece tener una luz encendida sobre su cabeza pero no encuentra cómo expresar su idea. Cuando todos lo han pensado un rato sin éxito, el profesor les da un empujón:

-Recuerden que los rayos del sol son paralelos. ¿Qué teorema podrá usarse aquí sobre rectas paralelas y ángulos?

-Lo de ángulos externos internos, ¿verdad? -dice Victoria sin pensarlo mucho.

-¡Ay, Vica! ¿Cómo que "externos internos"?

-Sí, lo de ángulos alternos internos -dice don Gerardo, disimulando el lapsus de Victoria-. ¿Cómo se usa aquí?

-No sé, todavía no lo veo -contesta ella-. Y no me digan "Vica".

-¡Ah, ya sé! -grita Andrea emocionada-. Claro: el segmento del centro de la Tierra hasta San José sigue en línea recta por el rayo de sol -dice, poniéndose de pie y señalando la pizarra con las dos manos-, y el que va del centro de la tierra hasta Liberia sigue por el poste, así que esa es una transversal entre los rayos paralelos. Entonces tiene razón Victoria: el ángulo en la punta del poste es igual a α.

-¡Uuuuh! -exclama Álvaro impresionado, y le aplaude a Andrea. Ella le hace una reverencia, sonriendo y sacándole la lengua a la vez mientras vuelve a sentarse.

-Y entonces sí vale la pena resolver el triángulo del poste como dijiste -le dice Carlos a Victoria-. Eso está fácil: el tangente de α es 16/6, así que α...

-No, esperáte -lo interrumpe Andrea-. Los 16 son centímetros y los 6 son metros. El tangente de α más bien es 16/600. Álvaro, vos que tenés calculadora: ¿Cuánto es α?

-Dénme un momentito y ya les consigo el dato -dice Álvaro mientras picotea las teclas de su calculadora-. Ajá, $\alpha = \arctan(0.026\bar{6}) = 1.5275...$

-Muy bien -interviene don Gerardo-. Vamos por muy buen camino, pero no olviden algo importantísimo: en la fórmula $S = \alpha r$, α debe estar en radianes. Álvaro, ese resultado que diste estaba en grados, ¿verdad?

-Seguro -dice Eduardo-, porque yo tenía mi calculadora en radianes y a mí me dio $\alpha = 0.02666...$.

-Así si nos sirve -dice el profesor-. Ya podemos despejar r en $S = \alpha r$. ¿Cuánto es?

-Da $r = S/\alpha$ = 170 km/0.02666 = 6 376.51 -dice Andrea, que le había quitado la calculadora a Álvaro-. ¿Pero cómo se hace con las unidades, Donge?

-Queda en kilómetros. Los radianes no afectan las unidades.

-Entonces son 6376.51 km. ¿De verdad ése es el radio de la Tierra?

-Es una muy buena aproximación. ¿Alguna vez han oído hablar del radio ecuatorial y el radio polar? -les pregunta. Nadie lo recuerda. -Pues la Tierra no es una esfera perfecta. Es achatada en los polos, como un... más bien como una...

-¿Como una bola de futbol americano?

-No, más bien como una bola de fut corriente con alguien sentado encima. La distancia del centro al Ecuador es mayor que la distancia del centro a los polos. La primera se llama radio ecuatorial, y mide unos 6380 km. La otra es el radio polar, y es como 6360 km. La diferencia no es mucha. Y aún así, lo que acabamos de calcular es una muy buena aproximación al radio ecuatorial.

-¿Eso es porque estamos más cerca del Ecuador que de los polos?

-En realidad fue suerte, porque los 6 m del poste y los 16 cm de la sombra son aproximaciones. Pero bueno, no hemos contestado la pregunta inicial: ¿Cuánto es la circunferencia de la Tierra?

Carlos ya estaba listo con la respuesta:

-Yo hice $C = 2\pi r$ y me dio C = 40 064.8 km.

-¿En Sociales no habíamos visto el año pasado que el Ecuador medía 40000 km? -recuerda Eduardo.

Nadie tiene respuesta para eso. Todos vuelven a ver a don Gerardo.

-Está muy cerca. Más bien es como 40080 km.

-Y Donge -interviene Victoria, todavía viendo la pizarra admirada-, ¿cómo se sabe en realidad cuánto mide la circunferencia de la Tierra? ¿Alguien le ha dado la vuelta en línea perfectamente recta?

-Pues ahora se usan mediciones hechas desde los satélites. Pero originalmente se usó un método como este: comparar los ángulos de los rayos del sol en distintos lugares.

-¿Y en aquel tiempo ya sabían tanta Mate como lo que acabamos de usar?

El timbre suena antes de que Donge pueda contestar. Los estudiantes recogen sus cosas y salen del aula comentando el problema que acaban de resolver.

-¿Viste, Carlillos? -se oye la voz de Álvaro alejándose por el corredor-. De algo servían las tonteras que aprendimos en Mate la semana pasada.

Don Gerardo mira hacia afuera por la ventana del aula, sonriendo satisfecho.