Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué?

Liliana Jiménez M., José Rafael Jiménez F.
Programa de Maestría en Matemática Educativa
Universidad de Costa Rica

"Cuando no está en nuestra mano determinar lo que es verdad, debemos actuar de acuerdo con lo que es más probable."

Descartes

Resumen:

Este trabajo va dirigido a maestros y profesores de Matemática. En él se exponen algunas reflexiones sobre la necesidad de abordar, en nuestros días, los conceptos de incertidumbre y probabilidad en la educación primaria y secundaria. Además se proponen algunos modelos de ejercicios que los introducen, con algunos comentarios didácticos para orientar el proceso.

Por otra parte, se trata de provocar más discusión acerca de la importancia de enseñar el tema de probabilidad a nivel tanto de secundaria como de primaria, ya que es reconocido que en el ámbito costarricense, los objetivos de este tema son dejados de lado con mucha frecuencia.

Palabras Clave: Incertidumbre, probabilidad, azar en la enseñanza.

Introducción

En los programas de estudio de Matemática para segundo y tercer ciclo, del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (M.E.P.), se incluye entre los contenidos por estudiar, algunas nociones ligadas a los temas de Probabilidad y Estadística. Sin embargo es conocido que en repetidas ocasiones estos temas no se cubren, al menos en secundaria. Esto ocurre, entre otras razones, porque el tiempo lectivo que propone el M.E.P. para cubrir los programas a veces resulta insuficiente. Esto último, aunado al hecho de que dichos temas hasta el año 2003 no eran evaluados en las pruebas nacionales de conclusión de ciclo, ha provocado que muchos profesores los dejen de lado. Amén de esto, se puede agregar que muchos docentes no son conscientes de la importancia que puede tener para un estudiante poseer como parte de su cultura un buen manejo de la noción de incertidumbre.

Además, podemos decir que, respecto a la enseñanza secundaria, en Costa Rica nos estamos quedando rezagados, en lo que al tema de probabilidad se refiere. Al analizar los planes de estudio vigentes se nota la balanza inclinada hacia los temas tradicionales: aritmética, geometría, álgebra y las funciones. Solamente se considera en octavo año el estudio de algunos elementos de estadística descriptiva elemental y en primaria escasamente dos o tres nociones introductorias al tema.

Por esta razón nos hemos propuesto en este trabajo, en primer término, dilucidar por qué es importante enseñar el tema de probabilidad, en la Sección 2. En las secciones siguientes se presentan unos modelos de ejercicios y situaciones, acompañados de comentarios sobre cuándo presentarlos, cuáles intenciones llevan y qué conceptos se trata de explotar en ellos; en la Sección 5 se proponen actividades para la primaria y en la Sección 6 para la secundaria.

¿Por qué enseñar Probabilidad?

La matemática sirve para modelar situaciones que se presentan en campos de la vida cotidiana a través de diferentes ciencias como la física, química, economía, biología, etc.; además juega un papel importante en el desarrollo tecnológico. De esta manera el saber matemático se puede considerar como un instrumento con el que es posible, a través de otras ciencias, reconocer y transformar la naturaleza y la sociedad.

En las últimas décadas el hombre ha sido testigo del gran incremento en la cantidad de avances científicos y tecnológicos en la sociedad moderna, en consecuencia, del cambio que esto ha provocado en el desarrollo industrial, la organización económica y social de los países.

Sin embargo, al tratar de modelar los fenómenos de la naturaleza, el hombre se ha encontrado con que hay situaciones que obedecen a un modelo determinista y otras que en cambio obedecen a un modelo aleatorio. Por ejemplo, en el caso de los científicos sociales es más difícil descubrir principios fundamentales que respondan a la inmensa complejidad de los fenómenos que se proponen estudiar, que para los investigadores de las ciencias naturales explicar las leyes de la caída libre. El fenómeno de la "prosperidad" nacional es aún más complicado. Además de los millones de voluntades y glotonerías humanas que la esculpen, están de por medio los recursos naturales, las relaciones con otras naciones, las perturbaciones causadas por la guerra, entre otras. Sin embargo estas dificultades que agobian a los científicos sociales son parecidas a las que algunas veces sufren los biólogos, por ejemplo cuando se trata de explicar el funcionamiento del cerebro humano o las leyes de la genética, o los físicos cuando tratan de explicar el estado de las partículas atómicas y subatómicas de la materia.

Como lo señala Kline: "Afortunadamente, las ciencias sociales y las biológicas han adquirido un método matemático, nuevo por completo, de obtener información sobre sus fenómenos respectivos: el método estadístico. (...) Sin embargo, con el uso de los métodos estadísticos, ha surgido también el problema de determinar la confiabilidad de los resultados. Este aspecto de la estadística se trata por medio de la teoría matemática de la probabilidad." (Kline, 1998, pág 496)

Igualmente, al hacer la planificación de proyectos industriales o el estudio y control de sistemas económicos complejos, el hombre se ha visto obligado a explorar y aprender nuevos métodos que hagan más eficiente su manejo. El desarrollo de estos métodos también ha contribuido a un aumento de la actividad dentro de ciertos campos de las matemáticas aplicadas, como por ejemplo, la Probabilidad, la Estadística, Teoría de Colas, Teoría de Fiabilidad entre otras.

Así mismo se puede agregar, como lo expresa Wakely en el prólogo al libro de J.C. Turner, *Matemática moderna aplicada: probabilidades, estadística e investigación operativa,* el aumento de la capacidad de los computadores ha hecho factible su utilización para explorar de una manera más amplia las implicaciones de los modelos matemáticos en los diferentes campos económicos o tecnológicos. Continúa: "Como resultado de ello, la industria (y en sentido amplio, la nación), necesita ahora de las matemáticas, y del modo de pensar matemático, de una manera sin precedentes en la historia. (...) Hoy en día un joven ejecutivo no puede considerarse a sí mismo persona culta si no hace más que inclinar la cabeza ante estos métodos."(Turner, 1981, pág 9)

Con todos estos cambios, la sociedad se ve inevitablemente obligada a adaptar y reestructurar su sistema educativo, para cumplir con su compromiso de formar a los individuos que la componen. Debe considerar que una persona que vive en esta sociedad moderna debe tener una idea más clara de aquellos fenómenos de carácter aleatorio, ahora más que en el pasado, ya que se cuenta con más información acerca de cómo los cambios en su vida se pueden ver influenciados por ello. Veamos algunos casos que lo ilustran: Cada mañana cuando se dirige al trabajo, un individuo tiene la confianza de que llegará. Sin embargo todos los días muchas personas salieron de sus casas y no lo lograron; esto lo conduce a pensar en los riesgos que debe asumir y los eventuales seguros que debe tomar. Al escoger el banco para sus operaciones un individuo espera que éste tenga solidez; no obstante, todas las decisiones tienen alguna incertidumbre, que se refiere a aquellas situaciones que no se pueden controlar, pero que influirán en el resultado. Si un joven decide iniciarse en el fumado, hoy día existe mucha información que indica una medida sobre el riesgo de enfermar de cáncer.

Dacunha en su libro *"Chemins de L`Aleatorie. Le hasard et le risque dans la société moderne."*, señala que el *azar* ha sido un recurso que han utilizado algunas sociedades para resolver diversas situaciones y que en nuestra época hasta se ha intentado utilizar en la asignación de empleos. Agrega, hay que aprender a dudar, a reconocer la incertidumbre, a saber que ella es parte del ejercicio de la ciudadanía. Los ciudadanos deberían integrar a su juicio la dimensión de lo aleatorio, cuando se trata de su responsabilidad individual y de la responsabilidad del estado.

De esta manera, específicamente en lo que se refiere a la enseñanza de la matemática, al menos en el nivel de secundaria en nuestro país, se debe incluir en los programas el concepto de aleatorio. Además, enseñar un conjunto de teorías que den acceso a los estudiantes a los elementos básicos de probabilidades, que le permitan tomar decisiones en su vida cotidiana y contar con una formación mínima para que puedan desarrollarse desde esa perspectiva en cualquier campo profesional o científico. "La probabilidad tiene la enorme cualidad de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales, y, por lo tanto, su conocimiento permite comprender y predecir mucho mejor el mundo en que vivimos" (Pérez y otros, 2000, pág 15). Solo así se logrará cumplir con el compromiso de formar un individuo que pueda manejar los conceptos básicos del siglo XXI.

Pinceladas de historia

Los primeros pasos en la teoría de las probabilidades fueron dados por el matemático y médico italiano Jerónimo Cardano (1501-1576). Se dice que Cardano era un jugador y que inclusive algunas veces estuvo en la cárcel a causa de sus trampas y pillerías. Él decidió que si iba a usar su tiempo en juegos de azar, aprovecharía para aplicar la matemática y así sacaría provecho de su pasatiempo. Procedió a estudiar las probabilidades de ganar en varios juegos de azar y publicó sus reflexiones de la materia en su libro *"Liber De Ludo Aleae"* (El libro de los juegos de azar). "Este libro es un manual del jugador, en el cual se enseña a hacer trampas lo mismo que a descubrirlas". (Kline, 1998, pág 518)

Más tarde, en 1653, otro jugador y matemático, el llamado *Caballero de Méré*, se interesó por la relación entre la matemática y los juegos de azar. "De talento limitado, remitió a Pascal algunos problemas sobre el juego de dados. Y éste, en colaboración con Fermat, hizo avanzar un poco más el estudio de la probabilidad. Cardano resolvió sólo unos cuantos problemas de probabilidades; Pascal concibió toda una ciencia. Se propuso *reducir a un arte exacto, con el rigor de la demostración matemática, la incertidumbre del azar, fundándose así una nueva ciencia que con justicia reclamaría para sí el asombroso título de: las matemáticas del azar.* Cardano, Pascal y Fermat llegaron a la probabilidad pasando por los problemas de los juegos de azar." (Kline, 1998, pág 518)

Aunque esta teoría nace como una aplicación de la matemática a los juegos de azar, su estudio se fue profundizando cuando se necesitaron otras aplicaciones. Esto se puede observar en el trabajo de Laplace, con su problema de determinar la exactitud de las observaciones astronómicas o en procesos de muestreo al aplicar algunos métodos de la estadística, que introducen inevitablemente la posibilidad de error. O en la biología con Mendel, en sus trabajos de genética.

Todo trabajo científico depende de la medición, pero toda medición es aproximada. Los científicos buscan minimizar las inexactitudes haciendo muchas mediciones de una misma cantidad y luego tomando la media de las cantidades medidas. Pero aquí cabe preguntarse, ¿cuán confiable es la media calculada de las mediciones reales?

Kline lo explica de esta manera. "Es deplorable la falta de certidumbre en algunas fases del trabajo científico, pero esto no es un obstáculo insuperable. Muy poco de lo que esperamos que nos ocurra en el porvenir es cierto. ¿Cómo se procede ante la incertidumbre? Descartes señaló el curso que seguimos todos, consciente o inconscientemente: *"Cuando no está en nuestra mano determinar lo que es verdad, debemos actuar de acuerdo con lo que es más probable."* En nuestra evaluación diaria de probabilidades, nos contentamos con estimaciones burdas, es decir, con sólo saber si la probabilidad es alta o baja. Al cruzar una calle hay incertidumbre, pero la cruzamos porque, sin hacer el cálculo respectivo, sabemos que es alta la probabilidad de sobrevivir al hacerlo. Pero en el trabajo científico y en las empresas de gran envergadura tenemos que hacerlo mejor. Ya no podemos aceptar estimaciones bastas, sino que debemos calcular con exactitud las probabilidades, y aquí es donde entra en juego la teoría respectiva." (Kline, 1998, pág 519)

La necesidad de una teoría de probabilidades surge cuando se estudian experimentos donde interviene el concepto de incertidumbre. Por eso se propondrán algunas actividades que involucran juegos para acercar al estudiante a las nociones de incertidumbre y probabilidad.

Algunas consideraciones generales para una propuesta didáctica

En las líneas anteriores se ha comentado la importancia que tiene *la probabilidad* en el mundo moderno, tanto para el desarrollo científico como para la cotidianeidad de cada persona. Se hace importante entonces considerar cuales son aquellos aspectos en los cuáles se debe fijar la atención para lograr que las probabilidades se inserten en el bagaje cultural de esta sociedad moderna. En Costa Rica, el estudio de las probabilidades se ha restringido fundamentalmente a las aulas universitarias, especialmente para los estudiantes de matemática y las ciencias económicas. También estudian este tema pero en menor grado los estudiantes de ciencias sociales y de ingeniería.

De aquí surge la necesidad de plantearse la inserción de la probabilidad en la educación general básica y el ciclo diversificado. Por supuesto que esto plantea un reto, en el sentido de que será un conocimiento nuevo, y que como tal ofrecerá la resistencia de los padres y de las autoridades.

En un primer momento se debe empezar a introducir, ampliar y desarrollar el concepto de "ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD". Hace algunos años se desarrollaron trabajos de investigación sobre la enseñanza del cálculo, la enseñanza del álgebra y de la enseñanza de la geometría, haciendo un análisis histórico y metodológico. Le ha llegado el momento a la enseñanza de la probabilidad.

Para desarrollar trabajos de investigación en torno a la enseñanza de la probabilidad, es necesario que se planteen preguntas interesantes cuyas respuestas sea preciso determinar para continuar el estudio de dicho tema. Estas preguntas deben referirse a aspectos fundamentales y tener la amplitud y la profundidad necesarias para que sus respuestas repercutan directamente en el desarrollo de la enseñanza de la probabilidad. Algunas posibles preguntas son:

1. Si se considera el marco filosófico en que se debe desarrollar la enseñanza de la probabilidad, de acuerdo con la filosofía de la ciencia y los aspectos históricos, políticos, científicos y religiosos que estuvieron presentes en los orígenes de esta ciencia, ¿cómo debe realizarse esa inserción en nuestra idiosincrasia?
2. Desde el punto de vista de la psicología del niño y de su desarrollo intelectual, ¿qué consideraciones se deben tener al enseñar probabilidades?
3. ¿Debe enseñarse la probabilidad en forma aislada, o conviene integrarla con otras ramas de la matemática como la teoría de números, la geometría, el álgebra y la trigonometría?
4. Cuáles son aquellos conceptos matemáticos que tienen un carácter de herramienta (Douady, 1995, pág 63) en el estudio de las probabilidades?
5. ¿Cuáles son los conceptos de probabilidades que deben enseñarse en primaria y secundaria? y ¿en qué forma deben distribuirse?
6. ¿Qué características deben tener los materiales que sirvan de apoyo en el trabajo de aula, tales como libros, dados, esferas, barajas, tablas, calculadoras, software?
7. ¿Cuál es la formación que se debe brindar a los futuros profesores de probabilidades?
8. ¿Qué peso debe tener la probabilidad en los curriculos de matemática de secundaria y de primaria?

En las dos secciones siguientes, se expondrán algunos ejercicios que al docente le podrían servir de modelo para generar otras actividades tendientes a introducir algunos de los conceptos de la teoría de las probabilidades y a desarrollar la noción de incertidumbre. Para una mayor comprensión se dividirán las actividades en: *actividades para la escuela primaria* y *actividades para la escuela secundaria*. Se procurará no entrar en mucho detalle en cada actividad, sino plantearlas en forma general haciendo consideraciones metodológicas para el profesor y adaptándolas al desarrollo intelectual del alumno.

Actividades para la primaria

La escuela primaria debe ser el lugar donde el estudiante se enfrente por primera vez a la probabilidad. Los docentes encargados deben tener la suficiente solidez en su formación para poder desarrollar adecuadamente esta tarea --aunque pareciera que son ellos quienes tienen más deficiencias en su formación sobre probabilidades--. Es importante que éstos tengan un dominio básico de la aritmética, de las fracciones, comprendan las operaciones básicas de la teoría de conjuntos, reconozcan si una variable es cualitativa, discreta o continua, interpreten gráficas y tablas de datos, comprendan modelos sencillos de experimentos aleatorios y planteen distintas actividades que ilustren esos modelos. Deben también los maestros, tener la capacidad de hacer una ubicación histórica, sencilla pero cierta, de las probabilidades, además de una idea clara de sus aplicaciones, de manera que éstas no resulten una amenaza para el entorno del estudiante, y se eliminen prejuicios. Esto último se podría lograr si se motiva al alumno con actividades en forma de juegos, pero además, si se indica la importancia de las probabilidades en el mundo actual, tales como los seguros, la salud, los negocios o la asignación de empleos.

Una propuesta de actividades didácticas para la primaria

Utilizando colores

Actividad 1.

> El maestro muestra a los alumnos cuatro bolas distintas solo en sus colores. Las coloca en una caja y dice a los estudiantes que "sin ver" se seleccionará una bola. Pero que antes quiere saber cuál bola piensan los estudiantes que saldrá. Anota en la pizarra los distintos colores y al lado escribe el número de alumnos que

creen que ese color corresponde a la bola que saldrá seleccionada. Se realiza el experimento y se escuchan comentarios de los estudiantes acerca de por qué razón se obtuvo ese color. En el momento de los comentarios es importante que el maestro apoye aquellos que tienen un sentido relacionado con el azar y rechace de una manera sencilla aquellos que tiendan a asignar motivaciones no aleatorias en los resultados. Se devuelve la bola a la caja. Luego se repite el experimento, sin hacer la primera parte, un número grande de veces (preferentemente un número múltiplo de cuarto, ya que en esta etapa no se van a calcular razones y se puedan comparar rápidamente las proporciones) y se va registrando en la pizarra el número de veces que se obtuvo cada color. Finalmente se comentan los resultados que se obtienen.

Actividad 2.

Se trata de repetir la actividad anterior pero con dos de las cuatro bolas de igual color, es decir hay tres colores y cuatro bolas. Antes de realizar la primera selección se debe notar si los estudiantes se dan cuenta que ahora hay un color que "puede salir más veces". Una vez realizado el experimento conviene escribir en la pizarra algunos comentarios como "el color que estaba repetido salió más veces ...", "todos los colores salieron ...", etc.

Actividad 3.

El maestro entrega a los alumnos una hoja en la cual está descrito el experimento. *Se tiene una caja con cinco bolas de diferentes colores: roja-verde-azul-amarilla-negra. Se extrae una bola y se anota el color. ¿Cuál cree usted que saldrá? Si se realiza el experimento 20 veces ¿cree usted que hay alguna bola que saldrá más veces?*. Nuevamente, lo importante es considerar aquellos comentarios que tienen un sentido relacionado con el azar.

Actividad 4.

El maestro entrega a los alumnos una hoja donde se describe el experimento: *Se tiene una caja con cinco bolas: cuatro rojas y una amarilla*. Se pueden repetir entonces preguntas similares a las anteriores y se puede pedir al niño que haga dibujos que ilustren su respuesta.

Comentarios de las actividades

En estas actividades se busca iniciar al alumno con experiencias aleatorias, de manera que pueda decir cuáles son los posibles resultados y cuáles pueden ocurrir con más frecuencia, usando recursos de fácil manejo y atractivos para el niño.

En las actividades 1 y 3 los eventos simples son equiprobables, mientras que en la actividad 2 no lo son. En la actividad 4 el niño debe seguir el modelo de las actividades anteriores pero el experimento es mental, en el sentido que el texto le describe la experiencia pero no tiene la presencia física de la caja con las bolas.

Combinando nombres

Actividad 1.

El maestro escribe en el pizarrón los nombres de cinco personas y pregunta a los niños. "¿Si se quiere escoger un comité de tres personas que representen a estos niños, de cuántas formas podemos hacerlo?". Una vez que se han escuchado algunas opiniones se les pide que digan posibles escogencias y se van anotando en la pizarra, teniendo el cuidado de que no queden repetidas. Es importante que en algún momento de la actividad se establezca que el orden no interesa, es decir que tres nombres en diferente orden representan el mismo comité. En este caso un problema que se plantea es cómo determinar cuando se tienen todos los resultados posibles para garantizar que se tienen todas las posibilidades. Si no se oyen sugerencias, conviene entonces que el profesor plantee a los estudiantes una técnica para formar estos comités. Una de ellas podría ser fijar un nombre, y luego escoger el segundo y el tercero. Es muy importante que en este nivel el profesor no dé fórmulas, para que el alumno logre construir resultados.

Actividad 2.

Otra actividad que conviene plantear como variante del caso anterior es aquella donde se asignaría a cada uno de los miembros del comité una determinada tarea que podemos llamar P=presidente, S=secretario y T=tesorero. Llamaremos a estos grupos directivas. La fase donde se establecen los resultados podría ser semejante a la realizada en la actividad anterior. Sin embargo conviene también desarrollarla en el sentido de que cada comité permite obtener un cierto número de directivas; así el profesor podría pedir inicialmente a los estudiantes que digan cuáles directivas se pueden obtener del comité formado por Mario-Carmen-Ana. Se esperaría que el estudiante haga todas las ordenaciones posibles con estos tres nombres y obtenga que el resultado es seis directivas. Observe que del grupo de cinco personas se podrían obtener sesenta directivas en total. Tratar de obtenerlas todas tal vez sea difícil, lo importante es que los estudiantes se den cuenta que en el caso de la actividad anterior el orden en la terna no importa, en cambio en esta actividad el orden de la terna sí importa.

Actividad 3.

El maestro les pide que formen grupos de tres personas y le entrega una hoja a cada alumno. En ésta se indican seis nombres y se les pide que determinen cuantos comités de cuatro personas se pueden formar con esas seis personas. La idea es que el alumno solo diga *cuántos*. El diagrama de árbol funciona bien en este caso.

Actividad 4.

Una vez realizada la actividad anterior conviene que los alumnos establezcan el número de directivas de cuatro personas que se pueden formar de esas seis personas.

Actividad 5.

Otra actividad que se puede desarrollar es pedir a cuatro alumnos que se coloquen frente al grupo uno al lado del otro. Una vez allí se les pide que se ordenen de distintas formas. Otro alumno escribiría en la pizarra cada uno de los resultados. Se esperaría que puedan establecer el resultado para la siguiente interrogante. "¿De cuántas formas se pueden ordenar cuatro personas?"

Luego el profesor podría plantear las preguntas: "¿De cuántas formas se pueden ordenar cinco personas?" "¿De cuántas formas se pueden ordenar seis personas?"

Conviene que el grupo generalice un método para poder contestar esas preguntas para cualquier número de alumnos.

Comentarios de las actividades

Las técnicas de conteo permiten al estudiante reconocer un universo de eventos donde debe trabajar. Este es un elemento necesario para que él pueda llegar a establecer una asociación entre un determinado evento y una medida de la incertidumbre. En espacios de probabilidad discretos, para asignar una medida a la incertidumbre de un cierto fenómeno aleatorio, se requiere determinar el número de eventos favorables entre la totalidad de eventos posibles.

De esta manera se hace necesario desde la primaria introducir a los estudiantes a las diferentes técnicas de conteo, aunque no se llegue a formalizar la teoría. Así se irán desarrollando las estructuras mentales necesarias para etapas posteriores donde sí se requiere de la formalización de resultados, trabajo que por cierto algunos investigadores han señalado como difícil de enfrentar para los estudiantes.

André Antibi, en su libro *Didácticas de las Matemáticas. Métodos de Resolución de Problemas*[1], se refiere a esta problemática. Muestra el grado de dificultad que presentan, tanto para profesores como estudiantes desde los liceos, los problemas de conteo. Señala que dichos problemas tienen al menos dos puntos en común: a menudo no se está seguro de su resultado y por otro lado muchas veces resultan difíciles.

Con las actividades mostradas en esta sección, se busca que el alumno se inicie en técnicas de conteo y a la vez que en el proceso se institucionalice --desde el punto de vista de la teoría de las situaciones de Brousseau-- un procedimiento que éste pueda utilizar, además de distinguir las condiciones en las cuáles se aplica.

Usando dados

El uso de los dados en la escuela primaria plantea el inconveniente que el alumno confunde el nombre del evento con la frecuencia de la ocurrencia. Así, puede ocurrir que si se lanza un dado el alumno crea que un 5 puede obtenerse con frecuencia cinco sobre seis. Es por esto necesario que se trabaje con dados que tengan en sus caras colores, dibujos de animales, ciudades, países, palabras, alimentos, hábitos, actividades, etc. Esto permitiría al maestro desarrollar actividades donde el niño lance el dado y pueda realizar una actividad complementaria. Por ejemplo, si sale "Argentina", decir cuál es la capital. O si sale "dormir" el niño simula que duerme y el maestro aprovecha para hacer un comentario sobre la importancia del sueño. Así aparece el dado y el azar como un recurso del aula que permite utilizarse en otras actividades. Es importante también desarrollar actividades como "lance dos dados y diga el resultado de multiplicar los dos números de las caras".

Comentarios generales de las actividades propuestas

- En general, no es necesario que en primaria se den definiciones de términos o se enuncien resultados formalmente. Más bien conviene ofrecer al alumno actividades que le permitan desarrollar las estructuras mentales necesarias que lo lleven a comprender los conceptos de las probabilidades.
- Conviene trabajar con atributos de cosas o personas, de manera que la frecuencia de que ocurra un evento no se confunda con el evento mismo.
- El maestro puede proponer actividades como "dibuje los resultados posibles" o "coloree las distintas formas en que puede ocurrir", para asegurarse que el niño está entendiendo el proceso.
- El profesor debe plantear actividades que puedan realizarse en grupos pequeños y que luego puedan ser analizadas en general.
- Lo importante es que el alumno desarrolle técnicas y métodos para resolver distintos problemas y no que utilice fórmulas.
- Es muy importante que el maestro planifique las actividades integrando otras áreas del currículo.
- La improvisación de actividades en el aula debe evitarse pues puede caerse en resultados de difícil manejo.
- Es importante tener siempre presente, "que la característica común de los fenómenos que estudia la probabilidad es que en ellos se observa la ocurrencia de algo (...), y en este contexto, experimentar equivale

a observar." (Pérez y otros, 2000, pág 31)

Actividades para la secundaria

Se propone que se enseñen los siguientes contenidos agrupados de la siguiente manera:

1. Técnicas de conteo y análisis combinatorio.
2. Cálculo de probabilidades de variables aleatorias discretas.
3. Cálculo de probabilidades de variables aleatorias continuas.

El tema 1 se puede desarrollar en sétimo y octavo, el tema 2 en noveno y décimo, y el tema 3 en undécimo año.

Una propuesta de algunas actividades didácticas para la secundaria

En esta sección se presentarán modelos de ejercicios ilustrativos para introducir el tema de probabilidades en secundaria. No se va a entrar en detalles en éstos, porque alargaría demasiado la exposición, dada la densidad del tema.

La idea es que en este nivel, aprovechando los conceptos y habilidades que traen los estudiantes de primaria, se vayan introduciendo las definiciones y teoremas necesarios para la comprensión de la teoría de probabilidades, formalmente.

Es muy importante dejar claro, en las primeras discusiones, que los fenómenos estudiados por la probabilidad cumplen con las siguientes características:

1. Se conocen todos los posibles resultados antes de realizar el experimento.
2. No se sabe cuál de los posibles resultados se obtendrá en un experimento en particular.
3. experimento puede repetirse. (Pérez y otros, 2000, pág 31)

Técnicas de conteo

Actividad 1.

El profesor divide al grupo en subgrupos de cuatro estudiantes.

Les pide a los alumnos que asignen cargos a cada uno de los miembros del grupo:
P = presidencia, S = secretaría, F = fiscalía, T = tesorería.

Cuando ya hayan hecho la asignación de cargos, les pide que den otra nueva asignación.

Después de que todos los grupos ya hicieron la asignación les pide que hagan todas las posibles asignaciones, es decir que escriban todas las posibles formas de asignar los cargos.

Una vez que todos los grupos consideren que finalizaron el trabajo se hace una comparación del número de resultados que todos los grupos hicieron.

Se debe establecer un resultado general.

Actividad 2.

El profesor muestra a los alumnos una caja con tres bolas distintas solo en el color --R: roja, B: blanca, A: amarilla--. Pide a un estudiante que seleccione una bola, anota la letra que corresponde al color. Devuelve la bola. La acción se repite dos veces más. El profesor dice a sus alumnos que este tipo de experimento se denomina "tres extracciones con reemplazo". Luego les dice: "Escriban en sus cuadernos todos los tipos de resultados que se podrían obtener". Cuando ya los hayan realizado, pregunta: "¿Cuántos resultados se obtuvieron?" Conviene que aquellos estudiantes que no obtengan una respuesta correcta revisen cuáles consideraciones no hicieron.

Cálculo de probabilidades de variables aleatorias discretas

Actividad 1.

Se divide en tres pasos.

1. Se asignan dos números distintos entre 1 y 6 a cada uno de tres estudiantes. Por ejemplo: Estudiante A: 1 y 4. Estudiante B: 2 y 5. Estudiante C: 3 y 6.

   Un estudiante lanza un dado. Se asigna un punto a aquel estudiante que tiene el número que tiene la cara superior del dado. El ganador del juego es aquel que logre primero sumar 5 puntos.

2. Se les pide que repitan el juego tres veces. (Pueden cambiar de números si lo desean)
3. Se entrega una hoja con las siguientes preguntas:

i) Antes de lanzar el dado, ¿cuál de todos los jugadores tiene mayor posibilidad de obtener el punto?
ii) ¿Cuál es el número mínimo de veces que se debe lanzar el dado para obtener un ganador?
iii) ¿Cuál es el número máximo de veces que se debe lanzar el dado para obtener un ganador?

Actividad 2.

Se escriben los números 1, 2, 3 en un papel. En otro se escribe 4, 5 y el 6 en otro papel. Cada estudiante selecciona un papel de modo que obtenga una asignación de números: Estudiante A: 1, 2, 3. Estudiante B: 4, 5. Estudiante C: 6.

Se repite el juego de la actividad 1 con las mismas reglas. Se agrega una pregunta:

iv) ¿Por qué considera que se obtuvo este ganador?

Actividad 3.

Se lanza un dado numerado del 1 al 6 y se observa el número de la cara superior.

1. Anote cuáles son los resultados que se pueden obtener.
2. Interesa observar si el número obtenido es múltiplo de 3. ¿Cuáles resultados son favorables a este suceso?
3. Analice el siguiente resultado: "El número obtenido es un divisor de 30" ¿Cuál fue ese número?
4. ¿Es posible el siguiente suceso: "El número obtenido es un múltiplo de 7"?
5. Cuando un suceso no ocurre con ningún resultado se llama "evento imposible". Dé un ejemplo de otro evento imposible.
6. ¿Puede obtenerse un número que sea par y menor que 5? Indique con cuáles resultados ocurre este suceso.

Actividad 4.

Hay cuatro jugadores que tienen un cartón con números y lanzan según su turno dos dados. Si el total de los dados es un número del cartón el jugador coloca una ficha sobre éste y continúa otro jugador. Gana aquél que complete una fila o columna antes que los otros jugadores.

7	9	5
8	*	3
6	10	4

6	9	7
4	*	3
10	11	12

8	5	7
3	*	10
4	11	2

11	9	12
3	*	10
2	4	5

Es importante que el estudiante conjeture con cuál de los cartones podría tener más éxito. Para esto el profesor debe orientarlo para que analice la probabilidad de que se obtenga cada uno de los números y también observe su correspondiente posición en el cartón. No es lo mismo que aparezca en un cartón una fila o columna con el 6, 7 y 8, que tener estos mismos números desordenados en el cartón. o que no aparezcan estos números del todo.

Actividad 5.

Suponga que se tienen dos dados que se lanzan para anotar el total X de la suma de las caras superiores.

1. ¿Es posible obtener $X = 1$ ó $X = 14$? Explique.
2. Escriba todos los resultados posibles que se pueden obtener.

3. ¿De cuántas formas distintas se puede obtener $X = 6$?
4. Complete la primera tabla (la tabla cruzada), escribiendo en cada casilla el total, X, que se obtiene al sumar los números que corresponden a la fila y a la columna. En la segunda tabla, escriba el número de veces que ocurre X (la frecuencia f), usando sus resultados en la tabla 1:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2			5			
3						
4						
5						
6					11	

X	f
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

5. Suponga que se van a lanzar dos dados. Hay tres jugadores y usted debe escoger de primero un número de los posibles que se obtendrían al sumar. Cada jugador escoge un número distinto. Ganará aquél que tiene el número que sale en la suma.

   i. ¿Cuál número escogería usted? Explique.

   ii. Si antes que usted los otros jugadores escogieron el 7 y 8, ¿cuál escogería usted? Explique.

Actividad 6.

Definición "Un fenómeno es aleatorio si se conocen todos los resultados posibles, pero no se puede decir con seguridad cuál de ellos ocurrirá en un caso particular" (Pérez y otros, 2000, pág 27)

Indique si los siguientes sucesos son aleatorios.

- Punto cardinal por donde saldrá el sol mañana.
- El marcador de un partido de fútbol antes de que inicie el partido.

- Lado por el que circulan los automóviles en una carretera de dos vías en Costa Rica.
- El artículo que se compró resultó defectuoso.
- Color de la luz en un semáforo que sigue después del color verde.
- El resultado de un dado que se lanza.
- Que un fumador muera de enfisema pulmonar.

Dé un ejemplo de:

a) Una situación de la vida cotidiana cuya ocurrencia dependa del azar.

b) Un hecho científico cuya ocurrencia es aleatoria.

c) Un hecho de la vida cotidiana cuya ocurrencia parece ser aleatoria pero no lo es.

d) Un hecho científico cuya ocurrencia parece ser aleatoria pero no lo es.

Conclusión

Una manera de contribuir a mejorar la enseñanza de la teoría de las probabilidades en nuestro país, es por medio de la investigación. Las interrogantes planteadas en la Sección 4 de este trabajo deberían desarrollarse en proyectos de investigación o acción social, o bien, en tesis de licenciatura o maestría, dada la necesidad de aclarar dichos puntos.

Por otro lado, si se busca que una propuesta acerca de profundizar más en la enseñanza de la teoría de las probabilidades en Costa Rica tenga éxito, es indispensable que las instituciones de educación superior tomen el asunto en sus manos, tanto apoyando investigaciones como las que se proponen en este trabajo, como con la labor de impulsar planes de capacitación en dos direcciones: una para formar a los docentes que nunca estudiaron los temas de Probabilidad y Estadística; otro que ayude a refrescar a los que olvidaron estos temas.

Además, se hace necesario incluir cursos específicos de Probabilidades en el plan de estudios de los maestros de primaria en el que se brinde todo lo necesario para que se desenvuelvan con soltura. Así mismo, es importante tener en consideración que el futuro maestro o profesor se forme también en cuanto a la historia de la matemática, en este caso, específicamente en el área de la Probabilidad. Deben conocerse los principales aportes de los matemáticos en este campo, cuáles problemas se estudiaron y de qué manera los enfrentaron, ya que esto podría facilitar su comprensión.

Por último, dado que la Teoría de Probabilidades clásicamente usa el lenguaje de la Teoría de Conjuntos, es importante que esta última se retome en los planes de estudio de matemática, tanto en la formación de docentes como en los programas oficiales. El estudio conjunto de algunos conceptos podría ser beneficioso para los estudiantes.

Bibliografía

1 Antibi, A. (2000) "*Didáctica de las Matemáticas. Métodos de Resolución de Problemas*". Editorial de la Universidad de Costa Rica, Serie Cabécar, San José, pág. 128-147.

2 Brousseau, G. (1986) "Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 7, N°2, pág. 33-115. Tradución al español por Centeno, J.; Melendo, B.; Murillo, R.

3 Dacunha-Castelle, D. (1996) *Chemins de L'Aleatorie. Le Hasard et le Risque dans la Société Moderne*. Flammarion, Paris

4 Douady, R. (1995) *"La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento"*, Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la Innovación en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Gómez P., editor. Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá, pág. 61-96

5 Kline, M. (1998) *Matemáticas para los Estudiantes de Humanidades*. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Fondo de Cultura Económica, México.

6 Ministerio de Educación Pública (C.R.). (2001) *Programa de Estudios, Matemática, II Ciclo*. Imprenta Nacional, San José.

7 Ministerio de Educación Pública (C.R.). (2001) *Programa de Estudios, Matemática, III Ciclo*. Imprenta Nacional, San José.

8 Pérez, B. R.; Castillo, A.; De los Cobos, S. (2000) *Introducción a la Probabilidad*. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, México.

9 Turner, J.C. (1981) *Matemática Moderna Aplicada. Probabilidades, Estadística e Investigación Operativa*. Versión española de Andrés Ortega. Alianza Editorial, Madrid.

10 Sitio Web: almez.pntic.mec.es/-agos0000/cardano.html, 15 de abril, 12:00 m.d.