Para qué tantas hipótesis en el Criterio de la Integral.

Luis Alejandro Acuña P.
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Resumen:

Se repasa el planteo tradicional del Criterio de la Integral para la convergencia de series (con las hipótesis de que la función en cuestión sea continua, positiva y decreciente, y la conclusión de que la serie y la integral impropia convergen ambas o divergen ambas). Se muestran ejemplos en los que fallan una o más de las hipótesis y la conclusión del criterio falla. Se demuestra que son innecesarias las hipótesis de continuidad y positividad, y finalmente que basta con una condición aún más débil que la de que la función sea decreciente. Los resultados se aplican tanto a la equivalencia entre la convergencia de la serie y la convergencia de la integral impropia como a la fórmula para la cota del error en las sumas parciales cuando la serie converge.

Palabras Clave: Series infinitas, criterios de convergencia, continuidad, criterio integral.

Introducción

Al estudiar las series infinitas, uno de los primeros criterios de convergencia que se presentan es el Criterio de la Integral. Su planteo tradicional dice, a grandes rasgos, que si f es una función continua, positiva y decreciente en $[1,\infty[$, entonces la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ converge.

En este artículo veremos que las hipótesis de continuidad y positividad son innecesarias. Con sólo suponer que f sea decreciente ya se puede demostrar la equivalencia entre las convergencias de la integral y de la serie. Y hay más: resulta que ni siquiera es necesario que f sea decreciente. Veremos que hay una condición aún más débil que sigue siendo suficiente en el Criterio de la Integral, pero reservamos los detalles para la última sección.

Planteo usual del Criterio Integral (CI) en la literatura

Como dijimos, tradicionalmente el enunciado del Criterio de la Integral (CI) pide que la función sea continua, positiva y decreciente. Por ejemplo, Larson, Hostetler y Edwards enuncian en su *Cálculo* [5]:

Teorema: *Si* f *es positiva, continua y decreciente para* $x \geq 1$ *y* $a_n = f(n)$*, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

convergen o divergen ambas simultáneamente.

Stewart, en su "Cálculo, trascendentes tempranas", lo enuncia de manera casi equivalente:

Teorema: *Suponga que* f *es una función continua, positiva y decreciente en* $[1, \infty)$ *y sea* $a_n = f(n)$. *Entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente si y sólo si la integral impropia* $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *es convergente.*

Al menos esa es la manera en que la mayoría de los libros de cálculo lo plantean, incluyendo los textos de Stewart, Larson, Purcell y otros. Curiosamente, los libros de análisis, como los de Apostol, Bartle, Lang o Rudin, omiten la suposición de que f sea continua. Por ejemplo, Rudin, en su libro "Principios de análisis matemático" [6], enuncia:

Teorema: *Si* $f(x) \geq 0$ *y si* f *es monótona decreciente para* $x \geq 1$*, entonces*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge, si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

converge.

Apostol, en su "Análisis matemático" [2], omite las hipótesis de continuidad y positividad pero añade una nueva, que f tienda a cero:

Teorema: *Sea* f *una función decreciente definida en* $[1, +\infty)$ *tal que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$*. Para* $n = 1, 2, \ldots$*, definimos*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \quad t_n = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x, \quad d_n = s_n - t_n.$$

Se tiene entonces:

- *i)* $0 < f(n+1) \leq d_{n+1} \leq d_n \leq f(1)$*, para* $n = 1, 2, \ldots$
- *ii)* $\lim_{n\to\infty} d_n$ *existe.*
- *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge si, y sólo si, la sucesión* $\{t_n\}$ *converge.*
- *iv)* $0 \leq d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \leq f(k)$*, para* $k = 1, 2, \ldots$

En realidad si f es decreciente y tiende a cero entonces f debe ser positiva, de modo que la hipótesis de positividad, si bien no es explícita, está presente pero escondida en el nuevo planteo. También escondida está la conclusión de que la serie converge si y sólo si la integral converge: el tercer punto del teorema no dice que $\int_1^{\infty} f$ converja sino que la *sucesión* $\{\int_1^n f\}$ converge, lo cual es equivalente en presencia de la suposición de que f sea positiva.

De cualquier manera, en la práctica las aplicaciones de este teorema no requieren que las condiciones se cumplan particularmente en $[1, \infty[$: basta con que se cumplan en el intervalo $[a, \infty[$, para algún $a \in \mathbb{R}$. De manera semejante, la palabra "positiva" se usa aquí en un sentido no estricto, significando que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, \infty[$. Además, tampoco es necesario que la integral y la serie empiecen en 1; pueden empezar ambas en cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Definiciones y resultados preliminares

Asegurémonos de que tenemos una base común para lo que sigue. Dos definiciones básicas son:

Definición 1: *Si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ *es integrable en cada intervalo* $[a, b]$*, entonces la integral impropia de* f *sobre el intervalo* $[a, \infty[$ *es*

$$\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f.$$

La integral converge si el límite existe, o diverge si no.

Definición 2: *Si* $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ *es una sucesión real, su serie es*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

La serie converge si el límite existe, o diverge si no. La cantidad $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *se llama la* n*-ésima suma parcial de la serie.*

Un resultado bien conocido es que cualquier sucesión real monótona y acotada es convergente (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Una propiedad semejante se cumple para funciones, y luego necesitaremos los siguientes dos resultados relacionados con esto (sus demostraciones están en el Apéndice):

Proposición 1: *Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión creciente o decreciente, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$ o $\inf\{a_n\}$ *respectivamente, donde el supremo podría ser* ∞*, y el ínfimo* $-\infty$*, si la sucesión no es acotada.*

Proposición 2: *Si* $f(x)$ *es creciente o decreciente en* $[a, \infty[$*, entonces* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \geq a\}$ o $\inf\{f(x) \mid x \geq a\}$ *respectivamente, donde el supremo o el ínfimo podría ser* ∞ *o* $-\infty$.

Los siguientes dos resultados son fundamentales. También están demostrados en el Apéndice.

Proposición 3: *Si la serie* $\sum a_n$ *es convergente, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Es tentador pensar que si la integral $\int_a^\infty f$ converge entonces f debe tender a cero, como sucede con las series. Pero no es así, como veremos en los ejemplos de la siguiente sección. Lo que sí es cierto es:

Proposición 4: *Si la integral* $\int_a^\infty f$ *converge y* f *es monótona en* $[a, \infty[$, *entonces* $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Por último, una propiedad algo más avanzada de las funciones monótonas es que son integrables según Riemann (la definición de integrabilidad se enuncia en el Apéndice):

Proposición 5: *Si* f *es monótona en* $[a, b]$, *entonces* f *es integrable según Riemann en* $[a, b]$.

Algunos contraejemplos si fallan las hipótesis

Volvamos al Criterio de la Integral y su planteo tradicional (suponiendo que la función es continua, positiva y decreciente). No es difícil encontrar ejemplos en los que fallan esas hipótesis y la integral converge pero la serie diverge, o viceversa. Veamos algunos.

Si falla la continuidad

Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

cuyo gráfico es como el siguiente:

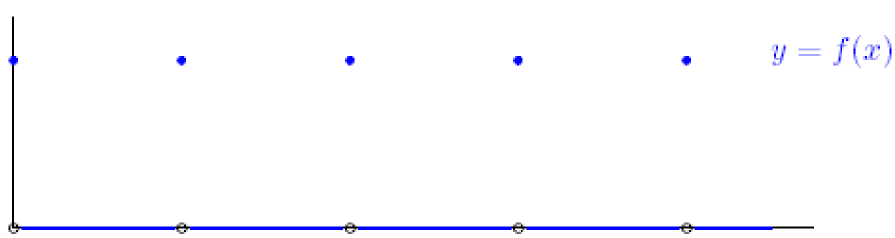

Figura1.

La función f es positiva, pero no continua ni decreciente. La integral $\int_1^\infty f$ converge porque $\int_1^b f = 0$ para cualquier $b > 1$, así que $\lim_{b\to\infty} \int_1^b f = 0$. Pero la serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ diverge porque sus sumas parciales son $S_n = \sum_{k=1}^n f(k) = n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Usando la misma f anterior, ahora la función $g = 1 - f$ tiene una integral divergente porque $\int_1^b g = b - 1$ para cualquier $b > 1$, pero su serie converge porque $\sum_{k=1}^n g(k) = 0$ para cualquier n.

La razón por la que la convergencia de la serie no es equivalente a la convergencia de la integral para las dos funciones anteriores no es que ellas sean discontinuas, sino que no son monótonas. Vea el siguiente ejemplo.

Si falla la monotonía

En el gráfico de la función f anterior es posible conectar los segmentos horizontales con los puntos aislados para construir una función continua con la misma propiedad de f: su integral converge pero su serie diverge. Considere el gráfico siguiente:

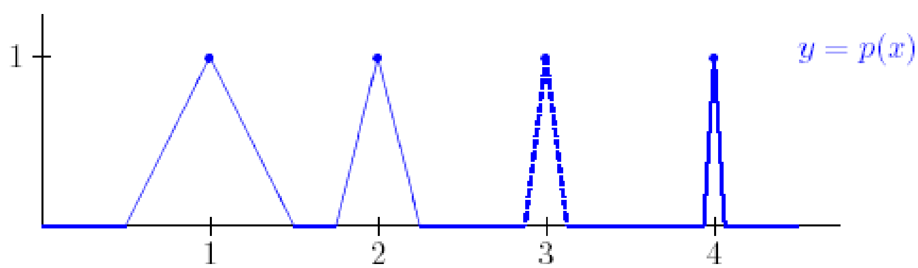

Figura 2.

Llamemos p a esta función. Ella es continua, y es constante en cero excepto por un intervalo de ancho 1 centrado en $x = 1$, un intervalo de ancho $1/2$ centrado en $x = 2$, uno de ancho $1/4$ centrado en $x = 3$, y así sucesivamente. En cada uno de esos intervalos de ancho $1/2^{k-1}$ con centro en $x = k$, para $k \in \mathbb{N}$, la integral de p es el área de un triángulo con altura 1 y base $1/2^{k-1}$: el área es $1/2^k$.

Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^n p \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

(la primera desigualdad se debe a que el último triángulo está incompleto). En resumen, $\int_0^n p < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por último, como $\int_0^x p$ es una función creciente de x, y acotada superiormente por 1 como acabamos de ver, resulta (Proposición 2) que $\int_0^\infty p$ converge.

Por otra parte, es obvio que $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)$ diverge, ya que $p(n) = 1$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$, como la función f del ejemplo anterior.

Así es que tenemos una función p, continua y positiva (pero no decreciente), para la cual la integral converge pero la serie diverge. Tomando, como antes, $q = 1 - p$, tendremos un ejemplo de una función continua y positiva tal que su integral diverge, porque

$$\int_0^n q \ge n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} > n - 1 \to \infty,$$

pero su serie converge porque $S_n = \sum_{k=0}^{n} q(k) = 1$ para todo n.

Si falla la positividad

Un ejemplo con una función que no es toda positiva puede ser $h(x) = \cos(2\pi x)/x$, para $x \ge 1$ (vea el gráfico abajo). Esta función cambia de signo y tiende a cero de una manera tal que su integral impropia converge, pero $h(n) = 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que la serie $\sum h(n)$ diverge (es bien sabido que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, conocida como la serie armónica, diverge).

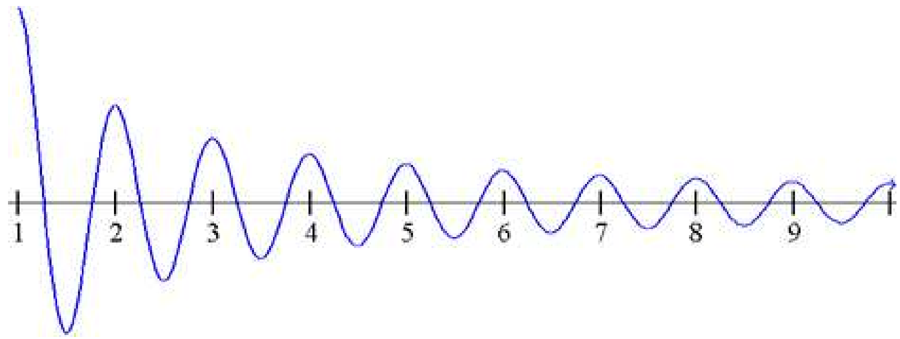

Figura 3.

Vamos eliminando las hipótesis

En los cinco ejemplos anteriores las funciones tienen algo en común: ninguna es decreciente. Unas son positivas, una de ellas no; unas son continuas y otras no. Pero ninguna de ellas es decreciente. De las tres hipótesis, f cumple solamente la de positividad y h sólo la de continuidad; p es continua y positiva pero no decreciente. Faltó ver entre los ejemplos una función que fuera sólo decreciente pero no continua o positiva, para la cual convergiera la serie y no la integral, o viceversa.

¿Por qué faltó? Muy sencillo: porque no existe tal función. Pronto demostraremos que cualquier función decreciente, continua o no, positiva o no, satisface la conclusión del Criterio de la Integral.

De hecho, las tres hipótesis tradicionales del CI son innecesarias. Podemos prescindir por completo de las dos primeras y todavía debilitar un poco la tercera, como veremos en esta sección.

¿Es necesaria la continuidad?

La primera hipótesis de la que podemos deshacernos en el CI es la continuidad, a pesar de que los textos usuales de cálculo la incluyen. Tenemos el siguiente lema:

Lema 1: *Si* f *es decreciente y positiva en* $[a, \infty[$ *para algún* $a \in \mathbb{N}$, *entonces* $\int_a^\infty f$ *converge si y sólo si* $\sum_{n=a}^\infty f(n)$ *converge.*

La siguiente demostración es típica de lo que puede encontrarse en los libros de análisis matemático.

Demostración: Primero, como f es positiva, tanto $F(x) = \int_a^x f$ como $S_n = \sum_{k=a}^n f(k)$ son funciones crecientes de x y n, respectivamente.

Además, como f es decreciente en $[a, \infty[$ entonces, por una parte, f es integrable en cualquier subintervalo de $[a, \infty[$ (Proposición 5), y por otra, para cualquier entero $k \geq a$ se tiene $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ para todo $x \in [k, k+1]$. Integrando los tres términos de la desigualdad sobre el intervalo $[k, k+1]$ obtenemos

$$f(k+1) \ \le \ \int_k^{k+1} f \ \le \ f(k), \qquad \forall k \ge a.$$

Sumando ahora para k desde a hasta cualquier entero $n \ge a$ obtenemos

$$\sum_{k=a}^{n} f(k+1) \ \le \ \sum_{k=a}^{n} \int_k^{k+1} f \ \le \ \sum_{k=a}^{n} f(k),$$

o bien

$$\sum_{k=a+1}^{n+1} f(k) \ \le \ \int_a^{n+1} f \ \le \ \sum_{k=a}^{n} f(k),$$

o más simplemente

$$S_{n+1} - f(a) \ \le \ F(n+1) \ \le \ S_n, \qquad \forall n \ge a.$$

Supongamos ahora que la integral $I = \int_a^\infty f$ converge. Entonces

$$S_{n+1} - f(a) \ \le \ F(n+1) \ \le I,$$

de modo que

$$S_{n+1} \ \le \ I + f(a), \qquad \forall n \ge a.$$

La sucesión $\{S_n\}$ es entonces no sólo creciente sino también acotada superiormente, por lo que debe converger (Proposición 1). De ahí que si $\int_a^\infty f$ converge, también $\sum_{k=a}^\infty f(k)$ converge.

Recíprocamente, supongamos que la serie $S = \sum_{k=a}^\infty f(k)$ converge. Entonces

$$F(n+1) \ \le \ S_n \ \le \ S, \qquad \forall n \ge a,$$

y de ahí que para cualquier real $x \geq a$:

$$F(x) \leq F(\lfloor x \rfloor + 1) \leq S$$

(donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x). Entonces la función F no sólo es creciente sino también acotada superiormente, y por lo tanto converge (Proposición 2). En conclusión, si $\sum_{k=a}^{\infty} f(k)$ converge, $\int_a^{\infty} f$ también converge.

Terminamos con eso la demostración del Lema 1, sin haber necesitado en ningún momento que f fuera continua.

¿Para qué plantearán esa hipótesis los libros de cálculo? Podría pensarse en una respuesta de tipo didáctico, ya que en los cursos de cálculo el CI se usa casi exclusivamente con funciones continuas. Pero eso no justifica el imponerle al estudiante, cuando resuelve los ejercicios, la carga adicional de verificar una hipótesis completamente innecesaria.

¿Es necesario que la función sea positiva?

Resulta que tampoco es necesario suponer que la función sea positiva, aunque muchos textos de análisis sí lo hacen. Partamos solamente de que f es decreciente en $[a, \infty[$, y consideremos dos posibilidades:

- Puede ser que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, \infty[$. En tal caso, por el Lema 1, la integral de f converge si y sólo si la serie de f converge.
- O puede ser que exista algún $c \in [a, \infty[$ con $f(c) < 0$. Entonces, como f es decreciente, $\lim_{x \to \infty} f(x) \leq f(c) < 0$, posiblemente $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ (Proposición 1). En consecuencia, tanto $\int_a^{\infty} f$ como $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ divergen (Proposiciones 3 y 4).

No hay ninguna otra posibilidad: f es toda positiva o bien f toma algún valor negativo, y en cualquier caso la integral converge si y sólo si la serie converge. Así de fácil hemos demostrado el siguiente lema, en el que no es necesario que la función sea positiva:

Lema 2: *Si f es decreciente en $[a, \infty[$ para algún $a \in \mathbb{N}$, entonces $\int_a^{\infty} f$ converge si y sólo si $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ converge.*

¿Y si la función no fuera decreciente?

Incluso *esa* hipótesis, de que la función sea decreciente, está sobrada hasta cierto punto. Volteando verticalmente el argumento anterior, resulta que si f es creciente entonces el Lema 2 puede aplicarse a $-f$, que es decreciente: $\int_a^\infty -f$ converge si y sólo si $\sum_{n=a}^\infty -f(n)$ converge. De ahí sigue que, si f es creciente,

$$\int_a^\infty f \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^\infty -f \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=a}^\infty -f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=a}^\infty f(n) \text{ converge.}$$

Entonces el criterio puede aplicarse ya sea la función creciente o decreciente. Esto implica que hasta la última hipótesis en la formulación tradicional, de que la función sea decreciente, es también prescindible: basta con que f sea monótona.

¿Y la cota del error?

En el planteo tradicional del CI hay un anexo que dice que, bajo las hipótesis del criterio, si la serie y la integral convergen entonces el error en la suma parcial n-ésima satisface la desigualdad

$$|S - S_n| \leq \int_n^\infty f.$$

Con la única hipótesis que conservamos aquí, que f sea monótona, también se cumple un resultado casi idéntico.

Esto significa que las hipótesis tradicionales del CI no son necesarias ni siquiera para acotar el error, como vemos en este Lema:

Lema 3: *Si* f *es monótona en* $[a, \infty[$ *para algún* $a \in \mathbb{N}$*, y la serie* $\sum_{n=a}^\infty f(n)$ *converge, entonces*

$$|S - S_n| \leq \left| \int_n^\infty f \right|$$

para cualquier entero $n \geq a$*, donde* $S = \sum_{k=a}^\infty f(k)$ *y* $S_n = \sum_{k=a}^n f(k)$.

Demostración: Notemos primero que si la serie converge entonces $|S - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^\infty f(k)\right|$ para cualquier $n \geq a$.

Si f fuera decreciente y tomara algún valor negativo, o si fuera creciente y tomara algún valor positivo, entonces la serie sería divergente como ya notamos, y no habría nada que demostrar.

Supongamos entonces que f es decreciente y positiva en $[a, \infty[$. En la demostración del Lema 1 teníamos que, para cualquier $n \geq a$,

$$\sum_{k=a+1}^{n+1} f(k) \leq \int_a^{n+1} f.$$

Si la serie converge (y por ende también la integral), podemos tomar límite cuando $n \to \infty$ y así obtener

$$\sum_{k=a+1}^{\infty} f(k) \leq \int_a^{\infty} f.$$

Si $n \geq a$, la desigualdad anterior se aplica también a n, ya que lo único que se supuso sobre a fue que f era decreciente y positiva en $[a, \infty[$, lo cual también es cierto en $[n, \infty[$. Entonces

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{\infty} f,$$

y como supusimos que f era positiva, esa desigualdad es equivalente a $|S - S_n| \leq | \int_n^{\infty} f|$.

Por último, si f es más bien creciente y negativa en $[a, \infty[$, todo lo anterior se aplica a $-f$ en el lugar de f:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} -f(k) \leq \int_n^{\infty} -f$$

para cualquier $n \geq a$, o bien

$$-\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq -\int_n^{\infty} f.$$

Como f es negativa, la desigualdad anterior equivale también a $|S - S_n| \leq | \int_n^{\infty} f|$, con lo que la demostración está completa.

Conclusión

Para repasar, hicimos lo siguiente: Primero demostramos que si f es decreciente y positiva entonces $\int_a^\infty f$ converge si y sólo si $\sum_{n=a}^\infty f(n)$ converge. Luego vimos que si f es decreciente y toma al menos un valor negativo, entonces tanto la integral como la serie divergen, así que la conclusión se mantiene con la sola hipótesis de que f sea decreciente y no necesariamente positiva. Lo siguiente fue notar que, si f es creciente, el criterio anterior se aplica a $-f$ y por lo tanto también a f, por lo que basta con suponer que f sea monótona. Por último vimos que la cota usual del error se mantiene con esa hipótesis única.

En conclusión, luego de haber descartado una por una las hipótesis tradicionales del CI, hemos arribado finalmente a esta versión sumamente austera en sus requisitos:

Teorema (Criterio de la Integral para convergencia de series): *Si* f *es monótona en* $[a,\infty[$ *para algún* $a \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\int_a^\infty f \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=a}^\infty f(n) \text{ converge.}$$

En tal caso,

$$|S - S_n| \leq \left| \int_n^\infty f \right| \quad \text{para todo } n \geq a.$$

Apéndice

Aquí demostramos las cinco proposiciones que se enunciaron en la Sección 2, e incluimos las definiciones necesarias para la Proposición 5 acerca de integrabilidad.

Proposición 1: *Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión creciente o decreciente, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$ o $\inf\{a_n\}$ *respectivamente, donde el supremo podría ser* ∞ *o el ínfimo* $-\infty$ *si la sucesión no es acotada.*

Demostración: Es muy semejante a la demostración de la Proposición 2, que es más general, por lo que omitimos la presente.

Proposición 2: *Si* $f(x)$ *es creciente o decreciente en* $[a,\infty[$, *entonces* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \geq a\}$ o $\inf\{f(x) \mid x \geq a\}$ *respectivamente, donde el supremo o el ínfimo podría ser* ∞ *o* $-\infty$.

Demostración: Veremos el caso de que f sea decreciente; el otro es análogo. Sea $A = \{f(x) \mid x \geq a\}$. Si A no es acotado inferiormente, para cualquier $M \in \mathbb{R}$ existe algún $x_0 \geq a$ con $f(x_0) < M$. Entonces $f(x) \leq f(x_0) < M$ para todo $x \geq x_0$. Esto demuestra que $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Por otra parte, si A es acotado inferiormente, sea L su ínfimo. Para cualquier $\epsilon > 0$, $L+\epsilon$ no es cota inferior de A, por lo que existe algún $x_0 \geq a$ con $f(x_0) < L+\epsilon$. Entonces, para cualquier $x \geq x_0$, $L \leq f(x) \leq f(x_0) < L+\epsilon$, así que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \geq x_0$. Esto demuestra que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

Proposición 3: *Si la serie* $\sum a_n$ *es convergente, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración: Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Como $\{S_n\}$ y $\{S_{n-1}\}$ son convergentes (al mismo límite), también lo es su diferencia $a_n = S_n - S_{n-1}$, con $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$.

Proposición 4: *Si la integral* $\int_a^\infty f$ *converge y* f *es monótona en* $[a,\infty[$, *entonces* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Demostración: Supondremos que f es decreciente (si f es creciente, el argumento siguiente se aplica a $-f$).

Veamos primero que $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$: Si existiera x_0 con $f(x_0) < 0$, sería $f(x) \leq f(x_0) < 0$ para todo $x \geq x_0$, y entonces, para todo $b \geq x_0$,

$$\int_{x_0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \int_{x_0}^{b} f(x_0)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x_0)(b - x_0).$$

Cuando $b \to \infty$, la expresión a la derecha tendería a $-\infty$, implicando que $\int_{x_0}^{\infty} f$ diverge. Esto contradice la hipótesis.

Entonces f no es sólo decreciente sino también acotada inferiormente por 0. Por la Proposición 2, existe $L = \lim_{x\to\infty} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \geq a\}$, y debe ser $L \geq 0$ porque 0 es una cota inferior de $\{f(x) \mid x \geq a\}$.

Como $f(x) \geq L$ para todo $x \geq a$, entonces para todo $b \geq a$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_a^b L\,\mathrm{d}x \;=\; L(b-a).$$

Si fuera $L > 0$, la expresión a la derecha tendería a ∞ cuando $b \to \infty$, como antes implicando que $\int_{x_0}^{\infty} f$ diverge y contradiciendo la hipótesis.

En conclusión, $L = 0$ como queríamos probar.

Definición 3: *Si* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, *una partición* P *de* $[a,b]$ *es una sucesión finita* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$ *con* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Definición 4: *Si* f *es acotada en* $[a,b]$ *y* P *es una partición de* $[a,b]$, *la suma superior de* f *para* P *es* $U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1})$, *donde* $M_k(f) = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. *La suma inferior es* $L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1})$, *donde* $m_k(f) = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$

Definición 5: *Si* f *es acotada en* $[a,b]$, *entonces la integral superior de* f *en* $[a,b]$ *es*

$$\overline{\int_a^b} f \;=\; \inf\{U(f,P) \mid P \text{ es una particin de } [a,b]\}$$

y su integral inferior es

$$\underline{\int_a^b} f \;=\; \sup\{L(f,P) \mid P \text{ es una particin de } [a,b]\}.$$

Se dice que f *es integrable según Riemann en* $[a,b]$ *si* $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Proposición 5: *Si* f *es monótona en* $[a,b]$*, entonces* f *es integrable según Riemann en* $[a,b]$.

Demostración: Supongamos que f es creciente (el caso de f decreciente es análogo). Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\Delta_n = (b-a)/n$, y sea P_n la partición $\{x_k = a + k\Delta_n \mid k = 0, \ldots, n\}$.

Como f es creciente, $M_k(f) = f(x_k)$, $m_k(f) = f(x_{k-1})$ y $x_k - x_{k-1} = \Delta_n$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Entonces

$$U(f,P_n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_n \;=\; \Delta_n \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

y

$$L(f,P_n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta_n \;=\; \Delta_n \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).$$

De ahí que $U(f,P_n) - L(f,P_n) = \Delta_n \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \Delta_n(f(b) - f(a))$; es decir,

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) \;=\; \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}.$$

Finalmente, como $\overline{\int_a^b} f \le U(f,P_n)$ y $\underline{\int_a^b} f \ge L(f,P_n)$, y como obviamente $\overline{\int_a^b} f \ge \underline{\int_a^b} f$, tenemos

$$0 \;\le\; \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \;\le U(f,P_n) - L(f,P_n) \;=\; \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}.$$

Como esta desigualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, como queríamos.

Bibliografía

[1] Apostol, Tom; "Calculus"; 1986.

[2] Apostol, Tom; "Análisis matemático"; 1977.

[3] Bartle, Robert; "Introducción al análisis matemático de una variable"; 2003.

[4] Lang, Serge; "Analysis I"; 1973.

[5] Larson, Roland, Robert Hostetler y Bruce Edwards; "Cálculo"; 1998.

[6] Rudin, Walter; "Principios de análisis matemático"; 1966.

[7] Stewart, James; "Cálculo. Trascendentes tempranas"; 2001.