# Sobre la finitud de las series de potencias infinitas de tipo geométrico-polinomiales[1]

Ing. George Braddock Stradtmann
geobrast@yahoo.com


## Resumen

Una investigación que inicié a mediados del año 2004, para tratar de encontrar cómo pudieron hacer los matemáticos de fines del siglo XVII, para encontrar la suma de algunas series de potencias infinitas, como por ejemplo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \left(\frac{1}{2}\right)^k$ , la pude concluir exitosamente.

A ese tipo de series yo las llamo geométrico-polinomiales, ya que son series geométricas, con coeficientes dados por una función polinomial $P_n(k)$ , de grado $n$.

Usando técnicas similares a las que usaban los matemáticos de aquellos tiempos, encontré un procedimiento que nos permite reagrupar los términos de la serie y expresarla con relación a las diferencias entre sus coeficientes.

Este procedimiento lo demostré formalmente con el Teorema 1 que, por medio de la fórmula

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = a_0 S + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})\, r^k S$$

nos muestra como expresar una serie geométrica infinita con relación a las diferencias finitas de sus coeficientes. Aplicándole **n** veces la fórmula anterior a la serie infinita, obtuve una serie finita equivalente a ella. Esto lo demostré formalmente con el Teorema 2 y el Teorema 3 que, con la fórmula

$$\sum_{k=m}^{\infty} \Delta_0^k r^k = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k^m r^{k+m} S^{k+1}$$

donde $\Delta_i^k$ representa las i-ésimas diferencias finitas de la función polinomial. Esta fórmula nos dá la serie finita que converge exactamente al mismo valor que la serie infinita original.


**Palabras claves**: Series, Series de Potencias, Series Infinitas, Series Geométricas, Funciones Polinomiales, Diferencias Finitas, Cálculo de Diferencias Finitas, Bernoulli.

*“Así como lo finito infinita serie encierra*
*Y en lo ilimitado limites aparecen,*
*Así el alma de la inmensidad en minucias reside*
*Y los límites no existen en los más estrechos límites.*
*¡Que gozo el discernir en el infinito lo pequeño!*
*¡De dioses es percibir en lo minúsculo lo inmenso!”*

*Jacob Bernoulli* [2]

[1] Fecha de recepción del artículo: Febrero, 2005. Fecha de aceptación: Junio, 2005.

[2] Dunham, William. “VIAJE A TRAVÉS DE LOS GENIOS. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos”. Ediciones Pirámide, S.A., 1993. Madrid, España.

# 1 Introducción

En el siglo diecisiete las series infinitas no eran muy conocidas, pero a fines de ese siglo algunos matemáticos ya conocían algunos teoremas generales sobre las mismas y la suma de una gran cantidad de ellas.
Por ejemplo, la suma de la "serie telescópica" $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$, la obtuvieron así:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+......\right]$$

$$= 2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+......\right]$$

$$= 2\left[1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+......\right] = 2\,[1] = 2$$

Dunham menciona que el matemático Jacob Bernoulli "no solo probó la divergencia de la serie armónica, sino que también conocía la suma exacta de un número de [series] convergentes"[3].

Por ejemplo, Jacob Bernoulli encontró la suma de la serie $N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+ck)}{b}\left(\frac{1}{d}\right)^k$ de la siguiente manera[4]:

$$N = \frac{a}{b}+\frac{a+c}{bd}+\frac{a+2c}{bd^2}+\frac{a+3c}{bd^3}+\frac{a+4c}{bd^4}+...$$

Esto lo podemos escribir así:

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{a}{b}+\frac{a}{bd}+\frac{a}{bd^2}+\frac{a}{bd^3}+...\right)+ \\ &\left(\frac{c}{bd}+\frac{c}{bd^2}+\frac{c}{bd^3}+...\right)+ \\ &\left(\frac{c}{bd^2}+\frac{c}{bd^3}+...\right)+ \\ &\left(\frac{c}{bd^3}+...\right)+... \end{aligned}$$

Como cada serie entre paréntesis es una serie geométrica, si suponemos que

$$S = \left(1+\frac{1}{d}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{d^3}+...\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{d}}\right) = \left(\frac{d}{d-1}\right)$$

[3] *Dunham, William.* ***EULER The Master of Us All****. The Mathematical Association of America, 1999. United States of America, pp.39-41.*

[4] *Ibid, p. 41*

Entonces

$$N = \frac{a}{b}\,S + \frac{c}{bd}\,S + \frac{c}{bd^2}\,S + \frac{c}{bd^3}\,S + ...$$

Es decir que

$$N = \frac{a}{b}\,S + \left[\frac{c}{bd}\,S\right]\left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{d^3}...\right) = \frac{a}{b}\,S + \frac{c}{bd}\,S^2$$

$$N = \frac{a}{b}\left(\frac{d}{d-1}\right) + \frac{c}{bd}\left(\frac{d^2}{(d-1)^2}\right) = \frac{1}{b}\left(\frac{ad^2 - ad + cd}{(d-1)^2}\right)$$

Dunham menciona también que Bernoulli encontró que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = 6$$

y que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \left(\frac{1}{2}\right)^k = 26$$

¿Cómo encontró Bernoulli esas sumas?. Esta pregunta me motivó a investigar si había algún procedimiento, parecido a los que usaban los matemáticos de aquella época, que me permitiera encontrar fácilmente la suma de ese tipo de series de potencias infinitas, a las que yo llamo "geométrico-polinomiales", ya que son series geométricas cuyos coeficientes están dados por una función polinomial de grado $n$ con coeficientes reales.

Encontré un procedimiento cuya aplicación repetida $n$ veces (igual al grado de la función polinomial), me permitió convertir la serie infinita en una serie finita. El resultado de esto lo pude expresar por medio de unas fórmulas muy explícitas, que nos dan la serie finita que converge exactamente al mismo valor que la serie infinita original.

A continuación explico, de una manera muy visual y muy típica de la época de Bernoulli, como es este procedimiento de reagrupamiento de los términos de la serie infinita, que es la clave para poder simplificarla y convertirla en una serie finita.

## 2 Series geométrico-polinomiales

Llamaremos $S$ a la serie geométrica dada por

$$S = 1 + r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \ldots \quad \text{con} \quad r \in\ ]-1, 1[ \qquad (1)$$

Supongamos ahora que tenemos una serie $N$ dada por:

$N = a + br^1 + cr^2 + dr^3 + er^4 + fr^5 + \dots \qquad (2)$

Los términos de esta serie los podemos reagrupar así:

$$
\begin{array}{rrlcl}
N & = & 1 + r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & & \\
 & + & 1 + r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & & \\
 & \vdots & & & \\
 & + & 1 + r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & \longrightarrow & a \text{ veces } S \,=\, a\,S \\
 & + & \quad\; r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & & \\
 & + & \quad\; r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & & \\
 & \vdots & & & \\
 & + & \quad\; r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & \longrightarrow & +(b-a) \text{ veces } r^1\,S = (b-a)r^1\,S \\
 & + & \qquad\quad r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & & \\
 & + & \qquad\quad r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & & \\
 & \vdots & & & \\
 & + & \qquad\quad r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & \longrightarrow & +(c-b) \text{ veces } r^2\,S \,=(c-b)r^2\,S \\
 & + & \qquad\qquad\; r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & & \\
 & + & \qquad\qquad\; r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & & \\
 & \vdots & & & \\
 & + & \qquad\qquad\; r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots & \longrightarrow & +(d-c)r^3\,S \\
 & + & \qquad\qquad\qquad r^4 + r^5 + r^6 + \dots & & \\
 & + & \qquad\qquad\qquad r^4 + r^5 + r^6 + \dots & & \\
 & \vdots & & & \\
 & + & \qquad\qquad\qquad r^4 + r^5 + r^6 + \dots & \longrightarrow & +(e-d)r^4\,S \\
 & \dots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \dots & \dots &
\end{array}
$$

Por lo tanto la ecuación (2) puede ser escrita así:

$$N = aS + (b-a)r^1S + (c-b)r^2S + (d-c)r^3S + (e-d)r^4S + \dots$$

Esta manera tan visual de reagrupar los términos de una serie para luego obtener su suma, era muy usada en aquellos tiempos iniciales de la teoría de las series infinitas. Con métodos como ese los matemáticos de fines del siglo XVII empezaron a obtener el valor de muchas sumas infinitas.

El resultado anterior lo formalizaremos ahora por medio del siguiente teorema

**Teorema 1**

Si $r \in \,]-1,1[$ , si los coeficientes $a_k$ están en $\mathbb{R}$ y $S$ es la serie geométrica dada por $S = 1 + r + r^2 + r^3 + ...$, entonces se cumple que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = a_0 S + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) r^k S$$

**Demostración:** Sabemos que la serie $S$ converge al valor $\frac{1}{1-r}$ por ser $S$ la serie geométrica, por lo tanto $1 = S - rS$
Multiplicando ambos lados por $a_k$ obtenemos que

$$a_k = a_k S - a_k r S$$

entonces $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k S - a_k r S)\, r^k$
de donde $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = (a_0 S - a_0 r S) + \left(a_1 r S - a_1 r^2 S\right) + \left(a_2 r^2 S - a_2 r^3 S\right) + ...$
reagrupando los términos obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = a_0 S + (-a_0 r S + a_1 r S) + \left(-a_1 r^2 S + a_2 r^2 S\right) + \left(-a_2 r^3 S + a_3 r^3 S\right) + ...$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = a_0 S + (a_1 r S - a_0 r S) + \left(a_2 r^2 S - a_1 r^2 S\right) + \left(a_3 r^3 S - a_2 r^3 S\right) + ...$$

que podemos escribir así $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = a_0 S + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})\, r^k S$

Ahora veremos un caso particular de una serie infinita geométrico-polinomial, formada por un factor polinomial de grado 3 y un factor geométrico $r \in\ ]-1, 1[$ . Demostraremos que esta serie se puede reducir a una serie finita de solo cuatro términos. Después generalizaremos este resultado para cualquier función polinomial $P_n(k)$ de grado $n$.

Sea $M$ la serie definida por $M = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k^3 + 2\right) r^k$
entonces $M = 2 + 3r^1 + 10r^2 + 29r^3 + 66r^4 + 127r^5 + \cdots$ (3)

Por el Teorema 1, esta serie la podemos escribir así:

$$M = 2S + (3-2)r^1 S + (10-3)r^2 S + (29-10)r^3 S + (66-29)r^4 S + (127-66)r^5 S + \cdots$$

$$M = 2S + 1r^1 S + 7r^2 S + 19r^3 S + 37r^4 S + 61r^5 S + \cdots$$

$$M = 2S + r^1 S[1 + 7r^1 + 19r^2 + 37r^3 + 61r^4 + \cdots] \quad (4)$$

Ahora a la suma que está entre corchetes le aplicamos nuevamente el Teorema 1:

$$M = 2S + r^1 S[S + (7-1)r^1 S + (19-7)r^2 S + (37-19)r^3 S + (61-37)r^4 S + \cdots]$$

$$M = 2S + r^1 S[S + 6r^1 S + 12r^2 S + 18r^3 S + 24r^4 S + \cdots]$$

$M = 2S + 1r^1S^2 + r^2S^2[6 + 12r^1 + 18r^2 + 24r^3 + \cdots]$ (5)

Nuevamente a la suma que está entre corchetes le aplicamos el Teorema 1:

$M = 2S + 1r^1S^2 + r^2S^2[6S + (12-6)r^1S + (18-12)r^2S + (24-18)r^3S + \cdots]$

$M = 2S + 1r^1S^2 + r^2S^2[6S + 6r^1S + 6r^2S + 6r^3S + \cdots]$

$M = 2S + 1r^1S^2 + 6r^2S^3 + r^3S^3[6 + 6r^1 + 6r^2 + 6r^3 + \cdots]$ (6)

$M = 2S + 1r^1S^2 + 6r^2S^3 + 6r^3S^3[1 + r^1 + r^2 + r^3 + \cdots]$

Ahora como la suma que está entre corchetes es la serie geométrica **S**, obtenemos finalmente:

$M = 2S + 1r^1S^2 + 6r^2S^3 + 6r^3S^4.$ (7)

Vemos pues que la serie infinita (3) se redujo a la serie finita (7) de solo 4 términos, luego que le aplicamos 3 veces seguidas el Teorema 1.

Este resultado lo podemos expresar así: $\sum_{k=0}^{\infty}\left(k^3+2\right)r^k = \sum_{k=0}^{3}\Delta_k^0 r^k S^{k+1}$

Donde $\Delta_k^0$ representa los coeficientes de la fila $k$ y la columna 0 de la "**Matriz de Diferencias Finitas**" que a continuación explicaremos como se obtiene.

La serie $\sum_{k=0}^{\infty}\left(k^3+2\right)r^k$ es de la forma $\sum_{k=0}^{\infty}P_3(k)r^k$ con $P_3(k) = k^3 + 2$.

Para esa función polinomial podemos crear la siguiente **Matriz de Diferencias Finitas**:

| i | k → | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $P_3(k)$ | $\Delta_0^k$ | 2 | 3 | 10 | 29 | 66 | 127 | 218 | 345 | ... |
| 1 | Primeras Diferencias | $\Delta_1^k$ | 1 | 7 | 19 | 37 | 61 | 91 | 127 | ... | ... |
| 2 | Segundas Diferencias | $\Delta_2^k$ | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | ... | ... | ... |
| 3 | Terceras Diferencias (constantes) | $\Delta_3^k$ | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | ... | ... | ... | ... |
| 4 | Cuartas Diferencias | $\Delta_4^k$ | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | ... | ... | ... | ... |

TABLA 1. Matriz de Diferencias Finitas para la función $P_3(k) = k^3 + 2$

Observe que $\Delta_i^k$ se refiere al coeficiente correspondiente a la fila $i$ y la columna $k$ de la matriz de diferencias. Los coeficientes $\Delta_0^k$ corresponden a los valores de la función $P_3(k)$.

Los coeficientes $\Delta_i^k$ para $i \geq 1$ se obtienen por medio de la siguiente relación de recurrencia: $\Delta_i^k = \Delta_{i-1}^{k+1} - \Delta_{i-1}^k$.

Note que los coeficientes de la serie original (3) son los coeficientes $\Delta_0^k$ de la fila 0 de la matriz de diferencias.

Los coeficientes de la ecuación equivalente (4) están dados por el coeficiente $\Delta_0^0$ de la fila 0 y todos los coeficientes $\Delta_1^k$ de la fila 1 de la matriz de diferencias.

Los coeficientes de la ecuación equivalente (5) están dados por el coeficiente$\Delta_0^0$ de la fila 0, el coeficiente $\Delta_1^0$ de la fila 1 y todos los coeficientes $\Delta_2^k$ de la fila 2 de la matriz de diferencias.

Los coeficientes de la ecuación equivalente (6) están dados por el coeficiente $\Delta_0^0$ de la fila 0, el coeficiente $\Delta_1^0$ de la fila 1, el coeficiente $\Delta_2^0$ de la fila 2 y todos los coeficientes $\Delta_3^k$ de la fila 3 de la matriz de diferencias.

Finalmente los coeficientes de la ecuación (7) están dados por los coeficientes $\Delta_0^0$, $\Delta_1^0$, $\Delta_2^0$ y $\Delta_3^0$ todos correspondientes a la columna 0 de la matriz de diferencias. La suma finita resultante tiene ahora solo 4 términos, ya que los coeficientes de la fila 4 en adelante son todos iguales a cero.

Ahora demostraremos que en general, si la función $P_n(k)$ es una función polinomial de grado $n$ y $r \in \,]-1,1[$ , entonces la serie infinita $\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k)r^k$ se puede reducir a una suma finita de solo $n+1$ términos.

En la segunda mitad del siglo XIX el conocido matemático George Boole demostró que si $P_n(k)$ es una función polinomial de grado $n$, entonces sus $n^{avas}$ diferencias serán constantes [5]:

La prueba es sencilla. Si $P_n(k) = ak^n + bk^{n-1} + ck^{n-2} + \cdots$

Entonces las primeras diferencias serán:

$$\Delta_1^k = P_n(k+1) - P_n(k)$$

$$\Delta_1^k = a\,(k+1)^n + b\,(k+1)^{n-1} + ...... - ak^n - bk^{n-1} - \cdots$$

$$\Delta_1^k = ak^n + ank^{n-1} + ... + bk^{n-1} + b\,(n-1)\,k^{n-2} + ... - ak^n - bk^{n-1} - \cdots$$

O sea de la forma $\Delta_1^k = ank^{n-1} + B_1k^{n-2} + C_1k^{n-3} + \cdots$, que es una función polinomial de grado $n-1$ con coeficientes $B_1$ y $C_1$ constantes.

Similarmente obtenemos que las segundas diferencias serán de la forma:

$$\Delta_2^k = an(n-1)k^{n-2} + B_2k^{n-3} + C_2k^{n-4} + \ldots$$

que es una función polinomial de grado $n-2$ con coeficientes $B_2$ y $B_2$ constantes.

Y así sucesivamente hasta que finalmente las $n^{avas}$ diferencias serán constantes:

$$\Delta_n^k = an(n-1)(n-2)......1$$

[5] *Boole, George. A* ***Treatise On The Calculus of Finite Differences****. Dover Publications, Inc., 1960. New York, United States of America. (Republicación del trabajo original publicado por Macmillan and Company en 1872). pp. 3-5.*

$$\Delta_n^k = a\,n!$$

donde $a$ corresponde al coeficiente del término de mayor grado del polinomio.

Para la demostración del caso general usaremos la siguiente matriz de diferencias finitas:

| $i$ | $k \longrightarrow$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $P_n(k) = \Delta_0^k$ | $\Delta_0^0$ | $\Delta_0^1$ | $\Delta_0^2$ | $\Delta_0^3$ | $\Delta_0^4$ | $\Delta_0^5$ | ... |
| 1 | Primeras Diferencias | $\Delta_1^0$ | $\Delta_1^1$ | $\Delta_1^2$ | $\Delta_1^3$ | $\Delta_1^4$ | $\Delta_1^5$ | ... |
| 2 | Segundas Diferencias | $\Delta_2^0$ | $\Delta_2^1$ | $\Delta_2^2$ | $\Delta_2^3$ | $\Delta_2^4$ | $\Delta_2^5$ | ... |
| 3 | Terceras Diferencias | $\Delta_3^0$ | $\Delta_3^1$ | $\Delta_3^2$ | $\Delta_3^3$ | $\Delta_3^4$ | $\Delta_3^5$ | ... |
| . | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| . | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $n$ | $n^{avas}$ Diferencias= $c_n n!$ (constantes) | $\Delta_n^0$ | $\Delta_n^1$ | $\Delta_n^2$ | $\Delta_n^3$ | $\Delta_n^4$ | $\Delta_n^5$ | ... |
| | TABLA 2. Matriz de Diferencias Finitas para una función $P_n(k)$ de grado $n$ | | | | | | | |

Sea $M = \sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) r^k$ con $P_n(k) = c_n k^n + c_{n-1} k^{n-1} + \cdots + c_0$ (8)

Entonces $M = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_0^k r^k = \Delta_0^0 + \Delta_0^1 r + \Delta_0^2 r^2 + \Delta_0^3 r^3 + \Delta_0^4 r^4 + \ldots$

Por el Teorema 1 y siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo numérico anterior, esta serie la podemos escribir así:

$$M = \Delta_0^0 S + (\Delta_0^1 - \Delta_0^0) r^1 S + (\Delta_0^2 - \Delta_0^1) r^2 S + (\Delta_0^3 - \Delta_0^2) r^3 S + (\Delta_0^4 - \Delta_0^3) r^4 S + ...$$

$$M = \Delta_0^0 S + r^1 S\, \{\, (\Delta_0^1 - \Delta_0^0) + (\Delta_0^2 - \Delta_0^1) r^1 + (\Delta_0^3 - \Delta_0^2) r^2 + (\Delta_0^4 - \Delta_0^3) r^3 + ...\, \}$$

Aplicando nuevamente el Teorema 1 a la parte que está entre llaves obtenemos:

$$M = \Delta_0^0 S + r^1 S\, \{\, (\Delta_0^1 - \Delta_0^0) S + [(\Delta_0^2 - \Delta_0^1) - (\Delta_0^1 - \Delta_0^0)] r^1 S + [(\Delta_0^3 - \Delta_0^2) - (\Delta_0^2 - \Delta_0^1)] r^2 S\ ...\}$$

$$M = \Delta_0^0 S + (\Delta_0^1 - \Delta_0^0) r^1 S^2 + r^2 S^2\, \{\, [(\Delta_0^2 - \Delta_0^1) - (\Delta_0^1 - \Delta_0^0)] + [(\Delta_0^3 - \Delta_0^2) - (\Delta_0^2 - \Delta_0^1)] r^1\ ...\}$$

...............

$$M = \Delta_0^0 S + (\Delta_0^1 - \Delta_0^0) r^1 S^2 + [(\Delta_0^2 - \Delta_0^1) - (\Delta_0^1 - \Delta_0^0)] r^2 S^3 + \cdots + r^n S^n [\Delta_n^0 + \Delta_n^1 r^1 + \Delta_n^2 r^2 + \Delta_n^3 r^3 + \cdots]$$

Y como todos los coeficientes de la fila $n^{ava}$ son todos constantes e iguales a $\Delta_n^0 = c_n\, n!$ :

$$M = \Delta_0^0 S + (\Delta_0^1 - \Delta_0^0)r^1 S^2 + [(\Delta_0^2 - \Delta_0^1) - (\Delta_0^1 - \Delta_0^0)]r^2 S^3 + \cdots + r^n S^n[\Delta_n^0 + \Delta_n^0 r^1 + \Delta_n^0 r^2 + \Delta_n^0 r^3 + \cdots]$$

$$M = \Delta_0^0 r^0 S^1 + \Delta_1^0 r^1 S^2 + \Delta_2^0 r^2 S^3 + \ldots\ldots\ldots + \Delta_n^0 r^n S^{n+1} \qquad (9)$$

Vemos pues que la serie infinita (8) se redujo a la serie finita (9) que tiene solo $n+1$ términos.

El resultado anterior lo podemos formalizar por medio del siguiente teorema:

**Teorema 2**

Si $P_n(k)$ es una función polinomial de grado $n$ con coeficientes reales y $\Delta_i^k$ representa sus i-ésimas diferencias finitas, si $r \in\, ]-1, 1[$ y $S$ es la serie geométrica dada por $S = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ entonces se cumple que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) r^k = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k^0 r^k S^{k+1}$$

**Demostración:** Al aplicar el Teorema 1 por primera vez obtenemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_0^k r^k = \Delta_0^0 S + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Delta_0^k - \Delta_0^{k-1}\right) r^k S$$

de donde obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_0^k r^k = \Delta_0^0 S + rS \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_1^{k-1} r^{k-1}$$

que podemos escribir así:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_0^k r^k = \Delta_0^0 S + rS \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_1^k r^k$$

Similarmente, después de aplicar $n$ veces el **Teorema 1** tendremos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_0^k r^k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k^0 r^k S^{k+1} + r^n S^n \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_n^k r^k \qquad (*)$$

Si $n$ resulta ser el grado de la función polinomial $P_n(k)$ entonces sus $n^{avas}$ diferencias $\Delta_n^k$ serán constantes, razón por la cual la serie infinita de la derecha se simplifica así:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_n^k r^k = \Delta_n^0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \Delta_n^0 S$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (*) obtenemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_0^k r^k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k^0 r^k S^{k+1} + r^n S^n \left(\Delta_n^0 S\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_0^k r^k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k^0 r^k S^{k+1} + \Delta_n^0 r^n S^{n+1}$$

que podemos escribir así: $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_0^k r^k = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k^0 r^k S^{k+1}$

Con el **Teorema 2** demostramos que si $n$ es el grado del polinomio $P_n(k)$ entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} Pn(k) r^k = \sum_{i=0}^{n} \Delta_i^0 r^i S^{i+1} \quad (10)$$

Como $S = \dfrac{1}{1-r}$ la fórmula anterior puede escribirse así:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) r^k = \sum_{i=0}^{n} \Delta_i^0 \frac{r^i}{(1-r)^{i+1}} \quad (11)$$

Ahora sea $r = \dfrac{1}{p}$ con $p \in \mathbb{R}$ y $|p| > 1$ entonces $S = \dfrac{1}{1-\frac{1}{p}} = \dfrac{p}{p-1}$

y tenemos que $r^i S^{i+1} = \dfrac{1}{p^i} \dfrac{p^{i+1}}{(p-1)^{i+1}} = \dfrac{p}{(p-1)^{i+1}}$

Por lo tanto, también podemos escribir la fórmula (10) así:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) r^k = p \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta_i^0}{(p-1)^{i+1}} \quad (12)$$

Asimismo teniendo en cuenta que $S = \dfrac{1}{1-r}$ y por lo tanto $r = \dfrac{S-1}{S}$

Entonces $r^i S^{i+1} = \dfrac{(S-1)^i S^{i+1}}{S^i} = (S-1)^i S$

Por lo tanto, también podemos escribir la fórmula (10) así:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) r^k = S \sum_{i=0}^{n} \Delta_i^0 (S-1)^i \quad (13)$$

Supongamos ahora que queremos calcular la suma de la serie mostrada en (3) pero a partir del tercer término, es decir a partir del índice $i = 2$:

$$F = \sum_{k=2}^{\infty} \left(k^3 + 2\right) r^k = 10r^2 + 29r^3 + 66r^4 + 127r^5 + \ldots$$

Esto podemos escribirlo así:

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+2)^3 + 2\Big] r^{k+2} = r^2 \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+2)^3 + 2\Big] r^k$$

Para la función $P_3(k) = (k+2)^3 + 2$ podemos crear una matriz de diferencias finitas que sería similar a la mostrada en la **Tabla 1**, pero sin incluir las 2 primeras columnas. Es decir la columna 0 de esta nueva matriz sería igual a la columna 2 de aquella, la columna 1 de esta nueva matriz seria igual a la columna 3 de aquella y así sucesivamente.

El resultado final al aplicar la fórmula (10) resultará ser la serie finita:

$F = r^2(10S + 19r^1S^2 + 18r^2S^3 + 6r^3S^4)$

O sea que $F = 10r^2S + 19r^3S^2 + 18r^4S^3 + 6r^5S^4$ (14)

Pero desde luego, es más fácil usar directamente la columna 2 de la misma matriz que ya teníamos construida en la **Tabla 1** y resolverlo de la siguiente manera:

$$F = \sum_{k=2}^{\infty} \big(k^3+2\big) r^k = \sum_{k=0}^{3} \Delta_k^2 r^{k+2} S^{k+1}$$

donde $\Delta_k^2$ representa los coeficientes de la columna 2 de la matriz de diferencias.

Con esta fórmula obtenemos para $F$ el mismo resultado que obtuvimos en (14).

Veamos:

$$F = \sum_{k=0}^{3} \Delta_k^2 r^{k+2} S^{k+1} = 10r^2S + 19r^3S^2 + 18r^4S^3 + 6r^5S^4$$

Este resultado lo generalizaremos formalmente por medio del siguiente teorema:

**Teorema 3**

Si $P_n(k)$ es una función polinomial de grado $n$ con coeficientes reales y $\Delta_i^k$ representa sus i-ésimas diferencias finitas, si $r \in\ ]-1,1[$ y $S$ es la serie geométrica dada por $S = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ entonces se cumple que:

$$\sum_{k=m}^{\infty} P_n(k) r^k = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k^m r^{k+m} S^{k+1}$$

**Demostración:**

$$\sum_{k=m}^{\infty} P_n(k) r^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_n(k+m) r^{k+m} = r^m \sum_{k=0}^{\infty} P_n(k+m) r^k$$

Por el **Teorema 2** y denotando por $\nabla$ la matriz de diferencias de la función $P_n(k+m)$

tenemos que: $\sum_{k=m}^{\infty} P_n(k)r^k = r^m \sum_{k=0}^{\infty} \nabla_k^0 r^k S^{k+1}$ (*)

Ahora, si $\Delta$ denota la matriz de diferencias de la función $P_n(k)$

entonces: $\nabla_k^0 = \Delta_k^m$

ya que la columna **0** de la matriz $\nabla$es igual a la columna $m$ de la matriz $\Delta$, la columna 1 de la matriz $\nabla$ es igual a la columna $m+1$ de la matriz $\Delta$, etc.

Por lo tanto podemos escribir la fórmula **(*)** así:

$$\sum_{k=m}^{\infty} P_n(k)r^k = r^m \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^m r^k S^{k+1}$$

es decir que:

$$\sum_{k=m}^{\infty} P_n(k)r^k = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k^m r^{k+m} S^{k+1}$$

Con el **Teorema 3** demostramos que si $n$ es el grado del polinomio $P_n(k)$entonces:

$$\sum_{k=m}^{\infty} P_n(k)r^k = \sum_{i=0}^{n} \Delta_i^m r^{i+m} S^{i+1} \quad (15)$$

Como $S = \dfrac{1}{1-r}$ la fórmula anterior puede escribirse así:

$$\sum_{k=m}^{\infty} P_n(k)r^k = \sum_{i=0}^{n} \Delta_i^m \frac{r^{i+m}}{(1-r)^{i+1}} \quad (16)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $r = \dfrac{1}{p}$ y que $S = \dfrac{p}{p-1}$ resulta que $r^{i+m}S^{i+1} = \dfrac{1}{p^{i+m}} \dfrac{p^{i+1}}{(p-1)^{i+1}} = \dfrac{p^{1-m}}{(p-1)^{i+1}}$

Por lo tanto, a la fórmula (15) la podemos escribir también así:

$$\sum_{k=m}^{\infty} P_n(k)r^k = p^{1-m} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta_i^m}{(p-1)^{i+1}} \quad (17)$$

Similarmente, teniendo en cuenta que $r = \frac{S-1}{S}$ resulta que

$$r^{i+m}S^{i+1} = \frac{(S-1)^{i+m} S^{i+1}}{S^{i+m}} = (S-1)^{i+m} S^{1-m}$$

Por lo tanto, a la fórmula (15) la podemos escribir también así:

$$\sum_{k=m}^{\infty} P_n(k)r^k = S^{1-m}\sum_{i=0}^{n} \Delta_i^m (S-1)^{i+m} \quad (18)$$

Estas últimas cuatro fórmulas contienen el resultado final de mi investigación.

Veamos ahora algunos ejemplos del uso de estas fórmulas:

**Ejemplo 1**

Jacob Bernoulli encontró la suma de la serie

$$N = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}(a+ck)\left(\frac{1}{d}\right)^k$$

por un camino mucho más largo y complicado, como vimos al comienzo de este artículo, por lo cual es muy probable que no conociera el procedimiento que empleamos para deducir las fórmulas anteriores.

Usando nuestra fórmula podemos encontrar rápidamente la suma de esa serie:

La matriz de diferencias finitas para la función $P_1(k) = (a+ck)$ es la siguiente:

| $i$ | $k \longrightarrow$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $P_1(k)$ | $a$ | $a+c$ | $a+2c$ | $a+3c$ | $a+4c$ | $a+5c$ | ... |
| 1 | Primeras $= c \times 1!$ Diferencias | $c$ | c | c | c | c | c | ... |
| | TABLA E1. Matriz de Diferencias Finitas para la función $P_1(k) = (a+ck)$ | | | | | | | |

Tenemos que el factor geométrico es $r = \dfrac{1}{d}$ y por lo tanto $p = d$.

Por la fórmula (12) tenemos que:

$$N = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}(a+ck)\left(\frac{1}{d}\right)^k = \frac{d}{b}\sum_{i=0}^{1}\frac{\Delta_i^0}{(d-1)^{i+1}}$$

Por lo tanto:

$$N = \frac{d}{b}\left[\left(\frac{a}{d-1}\right) + \left(\frac{c}{(d-1)^2}\right)\right] = \frac{d}{b}\left[\frac{a\,(d-1)+c}{(d-1)^2}\right]$$

$$N = \frac{1}{b}\left(\frac{ad^2-ad+cd}{(d-1)^2}\right)$$

**Ejemplo 2**

Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+7)^3}{(-4)^{3k+5}}$

Esta serie la podemos escribir así $M = \dfrac{1}{-4^5} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (2k+7)^3 \left(\frac{1}{-64}\right)^k$

La matriz de diferencias finitas para la función polinomial $P_3(k) = (2k+7)^3$ es la siguiente:

| $i$ | $k \longrightarrow$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $P_3(k)$ | 343 | 729 | 1331 | 2197 | 3375 | ... |
| 1 | Primeras Diferencias | 386 | 602 | 866 | 1178 | ... | ... |
| 2 | Segundas Diferencias | 216 | 264 | 312 | ... | ... | ... |
| 3 | Terceras $2^3 \times 3!$ diferencias | 48 | 48 | ... | ... | ... | ... |
| | TABLA E2. Matriz de Diferencias Finitas para la función $P_3(k) = (2k+7)^3$ | | | | | | |

Tenemos que el factor geométrico es $r = \dfrac{1}{-64}$ y por lo tanto $p = -64$.

Por la fórmula (12):

$$M = \frac{1}{(-4)^5} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+7)^3 \left(\frac{1}{-64}\right)^k = \frac{-64}{(-4)^5} \sum_{i=0}^{3} \Delta_i^0 \frac{1}{(-65)^{i+1}}$$

Es decir que:

$$M = \frac{-64}{-1024} \left[ \left(\frac{343}{(-65)^1}\right) + \left(\frac{386}{(-65)^2}\right) + \left(\frac{216}{(-65)^3}\right) + \left(\frac{48}{(-65)^4}\right) \right]$$

$$M = \frac{1}{16} \left[ -\left(\frac{343}{65^1}\right) + \left(\frac{386}{65^2}\right) - \left(\frac{216}{65^3}\right) + \left(\frac{48}{65^4}\right) \right] = -0.324146623$$

**Ejemplo 3**

Calcule la suma de la serie $M = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi k^2 - e}{2^k}$

Esta serie la podemos escribir así: $M = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\pi k^2 - e\right) \left(\frac{1}{2}\right)^k$

La matriz de diferencias finitas para la función polinomial con coeficientes reales $P_2(k) = \left(\pi k^2 - e\right)$ es la siguiente:

| $i$ | $k \longrightarrow$ | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $P_2(k)$ | $-e$ | $\pi - e$ | $4\pi - e$ | $9\pi - e$ | ... |
| 1 | Primeras Diferencias | $\pi$ | $3\ \pi$ | $5\ \pi$ | $7\ \pi$ | ... |
| 2 | Segundas $\pi \times 2!$ diferencias | $2\ \ \pi$ | $2\ \pi$ | $2\ \pi$ | $2\ \pi$ | ... |
| | TABLA E3. Matriz de Diferencias Finitas para la función $P_2(k) = \pi k^2 - e$ | | | | | |

Tenemos que el factor geométrico es $r = \dfrac{1}{2}$ y por lo tanto $p = 2$.

Por la fórmula (12):

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \pi k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 \sum_{i=0}^{2} \Delta_i^0 \frac{1}{1^{i+1}} = 2 \sum_{i=0}^{2} \Delta_i^0$$

Es decir que:

$$M = 2\left[-e + \pi + 2\pi\right]$$

$$M = 6\pi - 2e \approx 13.41299226$$

**Ejemplo 4**

Calcule la suma de la serie $M = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(3k^2 + k + 3\right)^3}{3^k}$

La función $P_6(k) = \left(3k^2 + k + 3\right)^3$ es una función polinomial de grado $6$ cuyas sextas diferencias son constantes e iguales a $3^3 6! = 19440$.

La matriz de diferencias finitas para la función $P_6(k) = (3k^2 + k + 3)^3$ es la siguiente:

| $i$ | $k \longrightarrow$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $P_6(k)$ | 27 | 343 | 4913 | 35937 | 166375 | 571787 |
| 1 | Primeras Diferencias | 316 | 4570 | 31024 | 130438 | 405412 | 1029826 |
| 2 | Segundas Diferencias | 4254 | 26454 | 99414 | 274974 | 624414 | 1238454 |
| 3 | Terceras Diferencias | 22200 | 72960 | 175560 | 349440 | 614040 | ... |
| 4 | Cuartas Diferencias | 50760 | 102600 | 173880 | 264600 | ... | ... |
| 5 | Quintas Diferencias | 51840 | 71280 | 90720 | ... | ... | ... |
| 6 | Sextas $3^3 \times 6!$ diferencias | 19440 | 19440 | ... | ... | ... | ... |
| | TABLA E4. Matriz de Diferencias Finitas para la función $P_6(k) = \left(3k^2+k+3\right)^3$ | | | | | | |

Tenemos que $p = 3$.

Por la fórmula (12): $M = \sum_{k=0}^{\infty} \left(3k^2+k+3\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^k = 3\sum_{i=0}^{6} \Delta_i^0 \left(\frac{1}{2^{i+1}}\right)$

Es decir que:

$$M = 3\left[27\left(\frac{1}{2^1}\right) + 316\left(\frac{1}{2^2}\right) + 4254\left(\frac{1}{2^3}\right) + 22200\left(\frac{1}{2^4}\right) + 50760\left(\frac{1}{2^5}\right) + 51840\left(\frac{1}{2^6}\right) + 19440\left(\frac{1}{2^7}\right)\right]$$

$$M = 3\left[\left(\frac{27}{2^1}\right) + \left(\frac{316}{2^2}\right) + \left(\frac{4254}{2^3}\right) + \left(\frac{22200}{2^4}\right) + \left(\frac{50760}{2^5}\right) + \left(\frac{51840}{2^6}\right) + \left(\frac{19440}{2^7}\right)\right]$$

$$M \;=\; 13679.625$$

**Ejemplo 5**

Calcule la suma de la serie $M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}k^4 + \frac{3}{4}}{7^k}$

La función $P_4(k) = \frac{1}{3}k^4 + \frac{3}{4}$ es una función polinomial de grado 4, con coeficientes racionales, cuyas cuartas diferencias son constantes e iguales a $(1/3)4! = 8$.

La matriz de diferencias finitas para la función $P_4(k) = \frac{1}{3}k^4 + \frac{3}{4}$ es la siguiente:

| $i$ | $k \longrightarrow$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $P_4(k)$ | 3/4 | 13/12 | 73/12 | 111/4 | 1033/12 | 2509/12 | 1731/4 |
| 1 | Primeras Diferencias | 1/3 | 5 | 65/3 | 175/3 | 123 | 671/3 | 1105/3 |
| 2 | Segundas Diferencias | 14/3 | 50/3 | 110/3 | 194/3 | 302/3 | 434/3 | 590/3 |
| 3 | Terceras Diferencias | 12 | 20 | 28 | 36 | 44 | 52 | 60 |
| 4 | Cuartas $(1/3) \times 4!$ diferencias | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| | TABLA E5. Matriz de Diferencias Finitas para la función $P_4(k) = (1/3)k^4 + 3/4$ | | | | | | | |

Como $S = \dfrac{1}{1-r} = \dfrac{7}{6}$ y por lo tanto $S - 1 = \dfrac{1}{6}$

Por la fórmula (13) tenemos que:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)k^4 + \left(\frac{3}{4}\right)}{7^k} = \left(\frac{7}{6}\right) \sum_{i=0}^{4} \Delta_i^0 \left(\frac{1}{6}\right)^i$$

$$M = \left(\frac{7}{6}\right)\left[\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{14}{3}\right)\left(\frac{1}{6^2}\right) + 12\left(\frac{1}{6^3}\right) + 8\left(\frac{1}{6^4}\right)\right]$$

$$M = 1.163065844$$

**Ejemplo 6**

Calcule la suma del ejercicio anterior pero sin incluir los primeros 5 términos de la serie:

$$M = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}k^4 + \frac{3}{4}}{7^k}$$

Usaremos la misma matriz de diferencias finitas del ejemplo anterior.

Por la fórmula (18) tenemos que:

$$M = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)k^4 + \left(\frac{3}{4}\right)}{7^k} = \frac{1}{(7/6)^4} \sum_{i=0}^{4} \Delta_i^5 \left(\frac{1}{6}\right)^{i+5}$$

Por tanto, usaremos los coeficientes de la columna 5 de la Matriz de Diferencias Finitas de la Tabla E5:

$$M = \left(\frac{6^4}{7^4}\right)\left[\left(\frac{2509}{12}\right)\left(\frac{1}{6^5}\right) + \left(\frac{671}{3}\right)\left(\frac{1}{6^6}\right) + \left(\frac{434}{3}\right)\left(\frac{1}{6^7}\right) + 52\left(\frac{1}{6^8}\right) + 8\left(\frac{1}{6^9}\right)\right]$$

$M = 0.017397372$

# 3 Conclusión

En este artículo llamamos "series geométrico-polinomiales" a aquellas series geométricas cuyos coeficientes están dados por una función polinomial de grado **n** con coeficientes reales.

Toda serie de potencias infinita geométrico-polinomial, puede convertirse en una serie de potencias finita de solo $n+1$ términos. Esto lo demostramos formalmente por medio del **Teorema 1** que nos muestra como expresar una serie geométrica con relación a las diferencias finitas de sus coeficientes y por medio del **Teorema 2** que nos muestra cómo, después de aplicar $n$ veces el Teorema 1, llegamos a obtener una serie finita con solo $n+1$ términos, equivalente a la serie infinita original. El **Teorema 3** nos permite encontrar cuál es la serie finita equivalente a una serie infinita, cuyo valor inicial para el índice es $m$ en vez de **0**.

En la revista **Science** del 24 de Junio de 2005 mencionan que el profesor William Dunham, en su nuevo libro "**The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue**" proporciona la demostración de Jacob Bernoulli de la suma $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \left(\frac{1}{p}\right)^k$. Originalmente la demostración apareció en la obra de Bernoulli "Tractatus de seriebus infinitis earumque summa finita" (Tratado sobre las series infinitas y sus sumas finitas).

Después de consultar el libro de Dunham encontramos que Bernoulli dedujo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \left(\frac{1}{d}\right)^k = \frac{d\left(d^2+4d+1\right)}{(d-1)^4}$$

usando un método muy similar al que vimos para la serie $N$ al inicio de este artículo.

Evidentemente Jacob Bernoulli encontró la suma de algunas series infinitas geométrico-polinomiales, por métodos válidos para algunos polinomios particulares, pero no por medio de un método general, válido para cualquier polinomio, como si hicimos nosotros y lo documentamos en este artículo.

**Bibliografía**


1) Boole, G. 1960. A Treatise On The Calculus of Finite Differences. Dover Publications, Inc. New York, United States of America. (Republicación del trabajo original por Macmillan and Company en 1872).

2) Dunham, W. 1999. Euler The Master of Us All. The Mathematical Association of America, United States of America.

3) Dunham, W. 2005. The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue. Princenton University Press, Princenton, NJ, United States of America.

4) Dunham, W. 1993. Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos. Ediciones Pirámide, S.A., Madrid, España.

5) Grabiner, J. V. 2005. Landmarks on the Road to Modern Analysis. Revista Science, Vol 308, pp 1872. The American Association of Science, US.

6) Spiegel, M. 1971. Calculus of Finite Differences and Difference Equations. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, Inc. (10th printing, 1994), US.