

Solitones, una no-linealidad no tan solitaria

Juan E. Nápoles Valdes

Universidad de la Cuenca del Plata
Lavalle 50, (3400) Corrientes, Argentina, (judic@ucp.edu.ar)
Universidad Tecnológica Nacional

Arturo González Thomas

French 414, (3500) Resistencia, Chaco, Argentina.

Fecha de recibido: Julio, 2005. Fecha de aceptación: Enero, 2006.

Resumen

En este trabajo, presentamos un análisis histórico del término matemático solitón, y los principales contribuyentes al estadio de desarrollo que hoy presenta. Para ello, se presentarán los fundamentos generales, desde un punto de vista histórico, pero siguiendo un enfoque problémico, y se ilustrarán algunas de las aplicaciones de dicha teoría.

Abstract

In this work, we present a historical analysis of the soliton term and the majors authors to the present state. For it, we beginning with the general foundations, from an historical point of view, but following a problem approach.

Palabras Clave: Solitón, ondas, partículas elementales, electromagnetismo.

Introducción.

Uno de los logros más notables que se han conseguido en la segunda mitad del siglo XX y que además ilustra con claridad la unidad subyacente de las Matemáticas y la Física No Lineal es la Teoría de Solitones. Los solitones son ondas no lineales que exhiben un comportamiento extremadamente inesperado e interesante, ondas solitarias que se propagan sin deformarse.

Tradicionalmente, hablamos de dos tipos de ondas. Las primeras, las ondas lineales, son las ondas familiares de la vida diaria, como, por ejemplo, las ondas de luz y las ondas de sonido. Estas ondas tienen velocidad constante, sea cual sea su forma: un Do sostenido viaja a la misma velocidad que un Fa bemol. Y, además, tienen longitud de onda constante: un Do sostenido sigue siendo un Do sostenido si lo oyes a una manzana de distancia. Las ondas lineales también obedecen al llamado principio de superposición: si tocas varias notas simultáneamente en un

piano, siempre escucharás la suma de todas esas notas a la vez, y esto es lo que produce armonía. Por muy complicado que sea un sonido se puede descomponer en los armónicos que lo constituyen.

Las otras ondas, las no lineales, son menos familiares y son bien distintas de las lineales. Una ola en el mar aproximándose hacia la orilla es un buen ejemplo de onda no lineal. Obsérvese que ahora la amplitud, la longitud de onda y la velocidad, van variando según avanza la ola, mientras que en las ondas lineales éstas son constantes. La distancia entre las crestas va decreciendo, la altura de las olas va creciendo mientras van *percibiendo* el fondo, y la velocidad cambia; la parte superior de la ola se adelanta sobre la inferior, cae sobre ella y la ola rompe. Hay fenómenos aún más intrincados como el de dos olas que se cruzan, interactúan de forma complicada y no lineal, y dan lugar a tres olas en lugar de dos.



Recreación del solitón el miércoles 12 de Julio de 1995, cuando un grupo de científicos que participaban en una conferencia sobre ondas no lineales en física y biología, en la Heriot-Watt University, se reunió en el Union Canal, cerca de Edimburgo, para reproducir el primer "avistamiento" de una onda solitaria en dicho canal.

Ahora llegamos a los solitones. Durante un paseo a caballo por los alrededores de Edimburgo, en el Union Canal en Hermiston, muy cerca del Riccarton campus de la Heriot-Watt University, el ingeniero escocés John Scott-Russell¹ observó cómo una barcaza era remolcada a lo largo de un estrecho canal por dos caballos que tiraban desde tierra, para obtener un diseño más eficiente de botes.

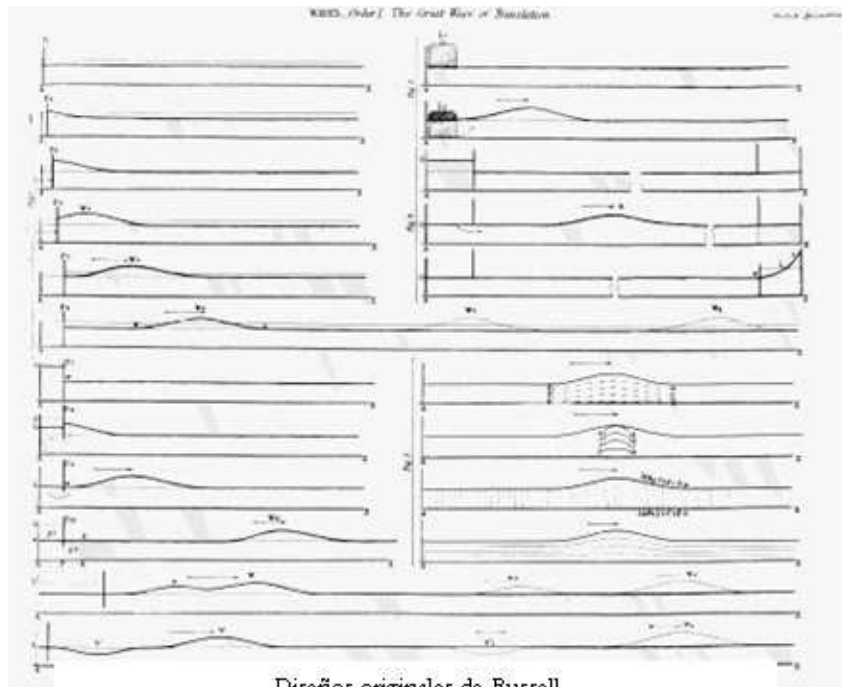


Transcurría el año 1834. Mientras Russell, contemplaba el espectáculo, la barcaza se detuvo repentinamente, ocasionando un movimiento violento del agua. Ante el asombro de Russell, se levantó una ola en la proa de la nave y *“fue deslizándose a gran velocidad hacia delante, formando una única ondulación de gran altura; una montaña de agua, redondeada y bien diferenciable, que continuó su recorrido por el canal, sin variar aparentemente su forma o reducir la velocidad”*. Russell saltó precipitado de su caballo y se lanzó en persecución del enigmático fenómeno. Durante más de dos kilómetros persiguió a la ola, sin perderla de vista, hasta que desapareció entre las innumerables curvas del canal.

Todos hemos examinado en más de una ocasión los movimientos de una ola, pero la acrobacia que observó Russell aquella mañana fue diferente. Cuando lanzamos una piedra a un estanque se forman pequeñas ondulaciones, que se van extendiendo y ensanchando en círculos concéntricos, cada vez más débiles. hasta que se difuminan en la orilla. Estas olas normales constan de cumbre: seguidas de valles. Pero la gigantesca ola que vio Russell en el canal era, por el contrario, un promontorio único sobre la superficie en calma del agua, que mantenía su forma intacta mientras avanzaba. Sorprendido por aquella visión, Russel tenía que averiguar sin demora si había sido víctima, quizás, de alguna ilusión óptica. Por este motivo, el ingeniero volvió una y otra vez al canal para hacer nuevas observaciones, y en cada ocasión tenía la oportunidad de contemplar atónito olas únicas. Russell las llamó *great waves of translation* y se dedicó a perfeccionar diferentes técnicas para reproducirlas en su laboratorio (el jardín trasero de su casa). Entre sus resultados empíricos se encuentra que la amplitud es proporcional a la velocidad de la onda, que el volumen de agua en la onda era igual al del agua desplazada, y fue capaz de obtener una fórmula que expresaba la velocidad de la onda en términos de la amplitud y profundidad del canal. Así, en 1844 en su "Report on Waves" informó a la **British Association** que "*I believe I shall best introduce the phenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn back along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped- not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles per hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that rare and beautiful phenomenon which I have called Wave of Translation*"².

Finalmente pudo recopilar los datos suficientes como para redactar un informe coherente, que envió a la **Royal Society de Edimburgo**³. Su publicación impresionó tanto a los investigadores de la naturaleza de todo el mundo, que éstos también intentaron observar las misteriosas olas en charcas, estanques, lagos y canales, para desvelar los mecanismos de su formación. Cualquiera puede convertirse en un investigador de olas. El descubrimiento de las olas únicas por parte del investigador escocés tuvo como consecuencia el despertar de un nuevo y enorme interés por las olas normales. Cómo se forman y propagan? Por qué éstas se van apagando poco a poco, mientras que la onda de una ola única se desplaza por el agua a gran velocidad, durante largo tiempo y sin modificar su forma o tamaño?⁴

Es más, varios científicos de su época argumentaron que las ondas de forma permanente no podrían existir. En particular, Airy y Stokes decían que la disminución de la onda era una indicación de que aquéllas no eran permanentes, ellos dedicaron parte de sus esfuerzos a entender este curioso fenómeno⁵, y no fue sino hasta el año 1870 que J. Boussinesq y Lord Rayleigh dedujeron que la amplitud de dicha *great wave of translation* debía ser una onda viajera proporcional al cuadrado de la secante hiperbólica, poseyendo así una localización exponencial. Boussinesq derivó la ecuación no lineal en derivadas parciales que hoy lleva su nombre.



Diseños originales de Russell

Pero no fue hasta 1895, cuando Diederick Johannes Korteweg y su estudiante Gustav de Vries presentaron la ecuación en derivadas parciales no lineal que captura la esencia de este fenómeno $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

donde el segundo término es el de dispersión y el tercero es el no lineal, una solución solitón es $u(x, t) = -\frac{12}{\alpha} a^2 \operatorname{sech}^2 [a(x - 4a^2 t - x_0)]$, donde a y x_0 son constantes arbitrarias. Sin embargo, la

ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) aparte de tener como soluciones a las *great waves of translation* nos reservaba grandes sorpresas⁶. En concreto, lo que estos teóricos averiguaron sigue teniendo validez hoy, al menos en sus puntos esenciales. Incluso, la teoría de Korteweg y De Vries encontró una clara aceptación en muchas ramas del saber científico, desde la física de partículas hasta la biología molecular.

Además, es posible que pueda contribuir a explicar uno de los misterios más excitantes de la ciencia moderna: el porqué algunas sustancias, en unas determinadas condiciones, se convierten en superconductoras, es decir, que de repente se dejan violar por la corriente eléctrica, sin prestar resistencia alguna. Pero, qué es lo que habían encontrado los físicos holandeses? Por qué podían, de pronto, comprender la existencia de la onda única? El motivo es que no creían en la inmutabilidad de los axiomas. Acabamos de conocer una de estas sentencias: la velocidad de una ola depende sólo de la longitud de onda y no de la fuerza de la onda, es decir, de la amplitud. El axioma naturalmente todavía sigue siendo cierto... bueno, casi siempre. Siempre que la cresta y el seno de la ola no sean excesivamente grandes que el mar o el lago tenga muchos centenares de metros y que ignoremos la fuerza de la ola.

Otro ejemplo de ecuación en derivadas parciales con soluciones solitónicas es la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(u - a)(u - 1), \quad 0 < a < 1, \text{ una de cuyas soluciones es "la onda viajera"}$$

$$u = \left[1 + \exp \left(\frac{x - ct}{\sqrt{2}} \right) \right]^{-1}, \text{ con } c = \frac{1 - 2a}{\sqrt{2}}.$$

Quisiéramos terminar esta parte con una observación, *existen muchas ecuaciones que tiene como soluciones solitary waves, pero estas usualmente no son soluciones solitónicas, ellas son undergo inelastic scattering. Pro ejemplo, las soluciones onda solitaria del laplaciano φ^4 no son solitones, aunque la mayoría de los físicos se refieren a ellas como tales*⁷.

Las ondas solitónicas.

Seguro se están preguntando qué es lo que ocurrió en el canal de Russell. Como se sabe, los canales tienen la profundidad suficiente para que las quillas no toquen el fondo. Ahora bien, si la ola originada por la proa de un barco que navega por el canal tiene una altura desmesurada, entonces el citado axioma deja de ser válido. Además de la longitud de onda resulta que la fuerza de la onda -que se refleja en la altura de su cresta- influye en la velocidad de propagación. En términos técnicos podemos afirmar que, si la superficie del agua está lisa, pero la amplitud de onda es grande, la velocidad vendrá dada en función tanto de la longitud de onda como de la altura de la misma. Ahora ya puede el lector profundizar casi por sí mismo en los secretos de la onda única, puesto que, si la velocidad de propagación de una onda no depende únicamente de su longitud, sino que entra en juego también su altura, entonces puede imaginarse todas las combinaciones posibles.

Mientras que las ondas normales se propagan linealmente y se construyen mediante ecuaciones sencillas, fáciles de resolver, en el caso de la onda única aparecen ante nuestros ojos procesos no lineales. Las ecuaciones no lineales son una maniobra matemática que un físico teórico, o un matemático puro, sólo utiliza cuando resulta absolutamente imprescindible. Las olas únicas, sin embargo, parecían no dar motivo para ello. Además, se las consideraba una rareza científica con poca importancia práctica y teórica.

Esta actitud despectiva por parte de los científicos cambió de forma rotunda cuando, en los años sesenta, comenzó la gran explosión de los ordenadores. Y qué es lo que puede hacer de modo inmejorable un ordenador? Simular procesos que no pueden ser observados en tiempo real sobretodo. A mediados de 1960 los científicos comenzaron a usar computadoras digitales para estudiar la propagación de ondas no lineales, y fue entonces cuando las primeras ideas de Russell empezaron a ser apreciadas. Russell vio a la onda solitaria como una entidad dinámica autosuficiente, una entidad que mostraba propiedades de partícula. Desde la perspectiva moderna, esto es usado como un elemento constructivo para formular comportamientos dinámicos complejos de sistemas de ondas en toda la ciencia: desde hidrodinámica hasta óptica no lineal, desde plasmas hasta colisiones de ondas, desde tornados hasta la gran Mancha Roja de Júpiter, desde partículas elementales de la materia hasta partículas elementales del conocimiento. Cada tipo de movimiento posible de las ondas ha sido estudiado, incluyendo los que resultan de la vibración de cuerdas, ondas de presión, ondas de agua y ondas electromagnéticas. De hecho, la mayor parte de la información que recibimos viene del movimiento de ondas. Procesamos información de lo que vemos y oímos. El sonido llega a nuestros oídos a través de ondas en el aire y somos capaces de leer este texto debido a las ondas de luz que rebotan de la página. Hoy en día contamos con mucha información que recibimos de la radio y la televisión, la cual llega a nosotros en forma de ondas electromagnéticas. Existen ahora varias definiciones de solitón, dependiendo de las áreas en que el investigador trabaja, pero la idea central de este concepto se manifiesta en todas sus definiciones. Así, por solitón nosotros conceptuaremos a una onda solitaria en forma de un pulso que es capaz de trasladarse sin cambio de forma y sin pérdidas de energía, y además es capaz de conservar su estructura después de un choque con su semejante, es decir, con comportamiento tipo partícula.

En 1965 Norman Zabusky y Martin Kruskal retomaron los estudios numéricos que Fermi, Pasta y Ulam realizaron en 1955 en Los Alamos para los fonones en una red anarmónica. Este modelo numérico era muy semejante a una discretización de la ecuación de KdV. Estos dos investigadores, descubrieron la existencia de un tipo de ondas localizadas muy especiales, que exhibían un comportamiento tipo partícula. Es decir, cuando dos de estas ondas interactúan, salen de la colisión con su identidad intacta, y solamente con un pequeño cambio de fase. Las llamaron ondas solitrónicas, pero como este término ya se usaba en patentes industriales, tomaron el nombre de solitones. Este término fue elegido para estar en concordancia con el nombre de las partículas elementales, tales

como electrón, protón, fotón, etc. Como un comportamiento tipo partícula era inusual en ondas no lineales, Zabusky, Kruskal y sus colegas buscaron entender a estos solitones. Como resultado de sus esfuerzos, dos años más tarde encontraron un método para resolver la ecuación KdV, que explicaba la dinámica del solitón. No pasaría mucho tiempo antes de que otros investigadores encontraran la presencia de solitones en otros sistemas y empezaran a aplicar técnicas similares⁸.

Ellos consideraron un problema de condiciones iniciales con condiciones de frontera periódicas para la ecuación de KdV. Así encontraron un fenómeno de recurrencia, que no podía ser el de Poincaré. Habían encontrado el **solitón** que pasamos a describir. Las *great wave of translation*, o el 1-solitón de Russell, interacciona con otros de su misma clase de una forma sorprendente para ser soluciones de una ecuación no lineal. Cuando dos de estos solitones chocan, tras un tiempo de interacción no lineal, emergen de la región de colisión preservando la forma inicial, de la interacción sólo queda un retraso o desfase⁹.

Así, un solitón es una onda solitaria que preserva asintóticamente su forma y velocidad en interacciones no lineales con otras ondas solitarias o con otras perturbaciones localizadas.

Un paso decisivo en la teoría de sistemas integrables fue la integración de la ecuación de KdV. Así, Gardner, Greene, Kruskal y Miura observaron que si consideramos un potencial $u(x)$ para la ecuación de Schrödinger estacionaria en la recta los correspondientes datos de *scattering* se transforman de forma extremadamente sencilla cuando el potencial cambia $u(x)u(x,t)$, siempre que $u(x,t)$ satisfaga la ecuación de KdV¹⁰. Por tanto, dada una condición inicial $u(x)$ para KdV, podemos hallar los datos de *scattering* asociados y determinar su evolución de manera inmediata. Tan sólo resta por encontrar que potencial $u(x,t)$ tiene estos datos de *scattering*; esto es, estamos ante un problema inverso. La solución de una ecuación integral lineal conocida, como de Gelfand-Levitan-Marchenko, lleva a la resolución del problema inverso planteado y, por lo tanto, al problema de condiciones iniciales para KdV. Este método se conoce como la transformada espectral inversa.

Parecería que sólo una gigantesca hélice podría destruir al solitón. Sin embargo, en lugar de desaparecer, de las olas rotas por el choque surgieron otras intactas, que continuaron avanzando alegremente, como si nada hubiera pasado. Parecía como si cada una de las dos olas únicas conservara su identidad primitiva, y fuera capaz de elevarse de nuevo, tras la confusión del choque, con su antigua forma y vigor. Los resultados fueron tan impresionantes, que Kruskal y sus colegas dieron un nuevo nombre científico a la ola única, el de solitón.

En 1971, dos investigadores de la Academia de Ciencias de la URSS, Vladimir Euguenievich Zakharov (ó Sajarov) y Aleksei Borisovich Shabat, descubrieron que había otra ecuación interesante que también tenía solitones: la que hoy conocemos como ecuación no lineal de Schrödinger (nls). El descubrimiento de Zakharov y Shabat era matemáticamente interesante, pero en ese momento parecía no tener relación alguna con la práctica ni las telecomunicaciones, que era la temática que les preocupaba en esos momentos¹¹.

Solitones y avances tecnológicos.

De repente, el solitón se hizo popular. Otros investigadores descubrieron que había solitones en medios líquidos, sólidos, gaseosos, e incluso en la corriente eléctrica o en un campo electromagnético. Se han podido estudiar solitones en sistemas tan diferentes como las atmósferas de los planetas, cristales, plasmas, fibras de vidrio, redes nerviosas y aparatos electrónicos. Es absolutamente emocionante lo que sospechan los biólogos moleculares: desde hace mucho tiempo están buscando el mecanismo que permite transportar los paquetes de energía a través de las cadenas de moléculas biológicas, como las proteínas, y conseguir de este modo efectos a grandes distancias. Algunos expertos creen que este efecto a distancia no tiene nada que ver con la química normal, sino que existen solitones que atraviesan, como fantasmas, la estructura de las moléculas.

En los periódicos, desde hace algún tiempo, vienen siendo noticia de primera página los superconductores a altas temperaturas. "*Superconducción: a temperaturas próximas al punto cero absoluto -menos 273 grados centígrados-*

desaparece la resistencia eléctrica en algunos metales". O esta otra noticia: "*Determinados materiales cerámicos se convierten en superconductores a altas temperaturas*". Entretanto se baraja la posibilidad de que existan también superconductores a temperatura ambiente.

Ahora, los físicos teóricos sospechan que los solitones juegan un papel clave en este proceso. Ya se han atrapado ondas únicas en determinadas estructuras superconductoras las denominadas *transiciones de Josephson*. Los científicos esperan que, con ayuda de solitones, algún día se podrán almacenar y transportar informaciones en ordenadores extremadamente rápidos. La propiedad característica del solitón es que, además de presentar una consistencia mucho mayor que las ondas normales, tiene una larga duración de vida. Un solitón sobre la superficie de una piscina podría ser destruido en cualquier momento con sólo remover el agua con una gigantesca hélice. Pero ojo, también hay solitones que no pueden ser desintegrados jamás, en particular, cuando son topológicas, es decir, cuando en su formación participa algún tipo de torsión. Con ayuda de cintas de goma se comprende lo que queremos decir. Imaginemos una cinta lisa y otra en la que hemos realizado una torsión. Si se tira de los extremos de la primera cinta y luego se suelta, obtenemos una onda única de larga duración, suponiendo que la goma no se comporte linealmente. Pero, si la retorremos, lo que provocamos es que se almacene energía en ella. Cuando soltamos la goma enroscada, se origina una cresta de onda, y esta vez el solitón es indestructible. Eso sí, el giro en la cinta se podrá desplazar hacia adelante o hacia atrás, pero no seremos capaces de anularlo. En este caso, los científicos hablan de solitones que están topológicamente prisioneros. Este tipo de solitones no tendría mayor interés, si las ondas únicas existieran exclusivamente en las cintas de goma o en cuerdas retorcidas. Pero la realidad es que tales solitones topológicos aparecen en las más diversas configuraciones. Por ejemplo, en un cristal se producen alteraciones en la disposición regular de los átomos que forman la retícula. Aunque estas variaciones son móviles dentro de la retícula, nunca pueden ser eliminadas. También existen solitones topológicos en los superconductores, cuando sus campos magnéticos están presos en tubos angostos. Algo similar ocurre en las cuerdas cósmicas, los hilos de materia primitiva del universo que explicarían cómo pudieron millones de galaxias surgir del plasma primitivo del Big Bang.

Queremos puntualizar solo algunas de las aplicaciones técnicas de estas investigaciones.

Fibra óptica.

En la década de los setenta tuvieron lugar tres acontecimientos independientes: uno proveniente de la ciencia de materiales, otro de las matemáticas, y otro de la física clásica, que al conjugarse, habrían de revolucionar la tecnología de las telecomunicaciones y acrecentarían enormemente el interés por los fenómenos no lineales. El primero de estos acontecimientos fue la aparición (en 1970) de un nuevo tipo de fibras ópticas, capaces de conducir señales luminosas a lo largo de distancias mucho mayores que las fibras anteriores. Las primeras fibras ópticas se fabricaron de vidrio. El principio físico usado en estos dispositivos es el principio de reflexión interna total, lo que fue demostrado por primera vez por John Tyndall en 1870. Cuando la luz viaja por diferentes medios con diferentes índices de refracción, hay un ángulo de incidencia crítico abajo del cual la luz será totalmente reflejada al primer medio sin que la luz penetre en la interfase. En 1950 el diseño de las fibras ópticas fue notoriamente mejorado al introducirse un revestimiento. La fibra forrada estaba construida por un centro de vidrio, rodeado por un material con un índice de refracción un poco menor que el del centro. Como la fibra tiene una sección transversal muy pequeña, el ángulo de incidencia de cualquier rayo de luz que se propague por ella será menor que el ángulo crítico necesario para producir reflexión interna. En consecuencia, la luz no podrá escapar del interior de la fibra hasta que llegue al final. El principal inconveniente al usar fibras ópticas es la pérdida de información a lo largo de la fibra, debido, entre otros aspectos, a impurezas absorbentes que hacen que la luz se atenúe. La atenuación de la intensidad luminosa se mide en decibelios (db) por unidad de longitud. Como es obvio, los solitones son entidades físicas que aparecen del delicado balance de fuerzas antagónicas y en modelos ideales de la materia. En casos reales como en la fibra óptica, este balance es una aproximación porque no es un material ideal en donde se observen estos balances. La pérdida de información en fibras ópticas se debe a varios fenómenos físicos, como se mencionó, y depende también de la longitud de onda de la luz. Comúnmente las pérdidas ocurren

debido a la absorción; y para entender estas pérdidas, es necesario indagar cómo las ondas de luz interactúan con la materia. Para un entendimiento correcto y riguroso del proceso de atenuación, es necesario recurrir a la mecánica cuántica, pero nosotros nos limitamos a presentar una explicación cualitativa del fenómeno. Las fibras ópticas están hechas de un material dieléctrico, en el cuál los electrones están fuertemente atados a los núcleos. Cuando las ondas electromagnéticas pasan a través del dieléctrico, interactúan con los electrones y el electrón responde como si se uniera a los núcleos mediante un resorte. La onda incidente desplazará al electrón de su posición de equilibrio, creándose así un dipolo oscilante. Estos dipolos oscilantes se comportan como una antena de radio en miniatura, que emite ondas electromagnéticas en todas direcciones, y a la misma frecuencia de la onda incidente. Esta reemisión de radiación electromagnética es llamada dispersión de Rayleigh, en honor a su descubridor John William Rayleigh. Las fibras con revestimiento anteriores a 1970 tenían pérdidas de 1,000 db/km, lo cual implicaba que la intensidad luminosa disminuía a 1/10 de su intensidad inicial tras haber recorrido 10 m a lo largo de la fibra. En 1970, sin embargo, se lograron construir fibras de sílica (óxido de silicio) con pérdidas de 20 db/km, las cuales permitían la transmisión de señales luminosas a través de distancias 50 veces mayores que con las antiguas fibras. Las nuevas fibras empezaban a ser prometedoras desde el punto de vista de las tele-comunicaciones, pero todavía tenían que superar el problema de los pulsos luminosos, que tendían a ensancharse debido a la dispersión. Este hecho es bastante perjudicial, ya que pulsos claramente separados en el transmisor podrían empezar a superponerse antes de llegar al receptor, causando que la información transmitida llegara distorsionada.

Ecuación de Schrödinger.

En 1971 ocurrió el segundo acontecimiento crucial de esa década y que ya mencionábamos, Zakharov y Shabat, descubrieron otra ecuación interesante que también tenía solitones: la ecuación no lineal de Schrödinger (nls).

Solitones ópticos.

El tercer acontecimiento ocurrió en 1973, cuando Akira Hasegawa y Frederick Tappert (dos investigadores de los Laboratorios Bell), encontraron que teóricamente era posible transmitir pulsos luminosos de cortísima duración sin ninguna dispersión a través de fibras ópticas con ciertas características, y que la propagación de tales pulsos estaba gobernada por la ecuación nls. El descubrimiento de Hasegawa y Tappert constituyó así el lazo de unión entre las matemáticas de los solitones con la tecnología de las fibras ópticas. Con el descubrimiento de Hasegawa y Tappert quedó claro que las fibras ópticas tenían verdaderamente posibilidades de ser usadas en las telecomunicaciones. Sin embargo, era necesario disminuir aún más el atenuamiento en las fibras, y desarrollar láseres capaces de producir los cortísimos pulsos necesarios para las aplicaciones en telecomunicaciones. En 1979, T. Miya, Y. Terunuma, T. Osaka y T. Miyashita (del Ibaraki Electrical Communication Laboratory, en Japón) lograron obtener fibras ópticas con una constante de atenuación de 0.2 db/km (para una longitud de onda de 1550 nm), las cuales podían conducir la luz a lo largo de 50 km de fibra antes de que la intensidad luminosa decayera a 10% de su valor inicial. Un año después, en 1980, Linn Mollenauer, Richard Stolen y John Gordon (de los Laboratorios Bell) lograron transmitir solitones ópticos de 7 ps de duración a lo largo de este tipo de fibras. Los exitosos resultados de Mollenauer, Stolen y Gordon, junto con las nuevas fibras con atenuaciones de 0.2 db/km, dejaron libre el camino para que las fibras ópticas revolucionaran la tecnología de las telecomunicaciones. Para tener una idea de la rapidez con que las fibras ópticas desplazaron a los cables metálicos de las telecomunicaciones, basta observar que si bien el séptimo cable submarino Trasatlántico (el tat-7) colocado en 1983 era todavía metálico, el siguiente cable trasatlántico (el tat-8), que se puso en operación en 1988, era ya de fibra óptica. La siguiente información nos da idea de la superioridad de las fibras ópticas sobre los cables metálicos (para usos en telecomunicaciones): a) En un cable metálico la máxima frecuencia que puede tener la onda portadora es aproximadamente de 60 mhz, ya que para frecuencias más altas la señal se atenúa demasiado rápido. b) Cada conversación telefónica requiere de un rango de frecuencias de 4 khz, de manera que por un cable metálico se pueden transmitir aproximadamente 15 mil conversaciones simultáneas ($15,000 = 60 \text{ mhz} / 4 \text{ khz}$). c) En un cable submarino moderno (por ejemplo el tat-12, tendido en 1996) es posible transmitir pulsos luminosos a una velocidad de 5 Gbits/s (es decir, cinco mil millones

de pulsos por segundo). d) Una conversación telefónica requiere alrededor de 60 kbits/s, de manera que el tat-12 puede transportar aproximadamente 80 mil conversaciones simultáneas (80,000 " 5 Gbits / 60 kbits). Actualmente se están diseñando sistemas de telecomunicaciones de fibras ópticas cuyas velocidades de transmisión parecen de 'ciencia ficción'. Existe un proyecto de telecomunicaciones a escala mundial, conocido como Proyecto Oxígeno, que planea usar 16 longitudes de onda diferentes, cada una de ellas con transmisión a una velocidad de 10 Gbits/s. Por lo tanto, cada fibra transmitirá 160 Gbits cada segundo.

Biosolitones.

Así como en óptica, en muchas otras ramas de la ciencia se encuentran los enigmáticos solitones, los cuales posiblemente jugarán un papel relevante para entender más el misterioso mundo en el cual estamos inmersos. Por otra parte, es probable que haya un sinnúmero de aplicaciones tecnológicas que podrían utilizar a los solitones. Ya se perfilan investigaciones en donde el enigma de la existencia de la vida se trata de explicar mediante el comportamiento de ondas en todos los niveles de organización de la materia. Los biosolitones son las nuevas entidades que tienen aplicaciones en ondas neuronales, en el adn, etc. También se están investigando como los responsables de la locomoción en seres vivos; incluso cuando se mapea en un espacio configuracional apropiado la locomoción del tipo de la marcha de los bípedos, por ejemplo, se encuentra que en este nuevo espacio, la marcha no es más que un ejemplo de comportamiento solitónico. La naturaleza provee a los seres vivos de órganos para huir de los depredadores, pero al hacer esto se debe de gastar la mínima cantidad de energía posible. Qué mecanismo natural podría reunir este tipo de cualidades? La respuesta está en los solitones: las ondas musculares que hacen reptar u ondular el cuerpo de las culebras, por ejemplo, deben de tener naturaleza solitónica porque los solitones se trasladan sin pérdida de forma o velocidad, y además mantienen constante la energía. Es interesante observar que los solitones surgen como una combinación armónica de tendencias que, por sí solas, serían destructivas. Consideremos, por ejemplo, el caso de la propagación de pulsos luminosos en fibras ópticas. En este tipo de sistemas hay dos procesos fundamentales que gobiernan el comportamiento de los pulsos: un proceso dispersivo, que tiende a ensanchar los pulsos, y un proceso no lineal (cuando la intensidad del campo se acrecienta) que tiende a modificar de manera continua la frecuencia de la ondas que conforman el pulso. Por sí solos, cada uno de estos procesos tiende a deteriorar la calidad de los pulsos. Sin embargo, al combinarse de manera adecuada, estos dos procesos parecen cancelarse mutuamente, alcanzando un equilibrio sorprendente. Es interesante observar aquí que el proceso no lineal no tiene la apariencia de ser un proceso contrario al proceso dispersivo, ya que su efecto no es adelgazar a los pulsos. Es, pues, una sorpresa que estos dos procesos se equilibren entre sí. Observar, pues, que dos procesos que por sí solos serían destructivos pueden armonizarse para producir una entidad estable, y en cierto modo eterna, es una enseñanza que nos podría ser de utilidad en múltiples situaciones. Es notable el resultado de Randall G. Hulet y colaboradores de la Rice University, que han observado solitones brillantes en el condensado de Bose Einstein (bec) (el cuarto estado de la materia). Como el bec consiste de átomos (en este caso de Lithium) ultrafrios, todos ubicados en el mismo estado cuántico, éste exhibe propiedades ondulatorias y por lo tanto puede considerarse como una onda atómica. La aplicación tecnológica de estos solitones en el bec ayudaría a crear versiones bec de giroscopios para una navegación ultra precisa y la creación de relojes atómicos exactos¹².

Conclusión.

Los físicos de partículas tienen puestas sus esperanzas en las ondas únicas. En el mundo subatómico, es decir, en el interior de los átomos, no aparecen los solitones unidos a partículas materiales, sino como estados de excitación de los campos subatómicos. Esto suena muy complicado, pero a tales campos les debemos, en gran parte, la existencia de nuestra tecnología moderna. Los campos electromagnéticos, por ejemplo, nos traen a casa los programas de radio y televisión. Si uno de estos campos no se encuentra excitado, entonces es especialmente uniforme y no se puede descubrir en él ningún tipo de peculiaridad especial. La excitación crea tales

singularidades, que luego pueden registrarse como distintas informaciones en nuestros receptores de radio y de televisión.

Los campos electromagnéticos impiden su propio crecimiento, comparemos éste con una población biológica. Mientras la población sea relativamente pequeña, en comparación con la alimentación disponible, está se reproduce sin problemas y la población va aumentando exponencialmente, lo que quiere decir que se duplica en un cierto período de tiempo. El crecimiento exponencial es característico de un sistema lineal. Al igual que el índice de natalidad de cada pareja, dicho crecimiento opera independientemente del comportamiento de los otros miembros de la comunidad. Ahora bien, cuando la población es muy grande, se rompe la linealidad. Al no haber suficiente alimento para todos, la población lucha por ella. En la misma medida en la que aumenta la población y se intensifica la crisis alimentaria, desciende el índice de reproducción. Tenemos aquí una situación no lineal, que puede describirse del siguiente modo: una población actúa sobre sí misma, impidiendo su propio crecimiento. Seguro que se están preguntando a qué viene esta analogía. Pues bien, los campos, por ejemplo los electromagnéticos, pueden actuar sobre sí mismos e impedir o fomentar su propio crecimiento. En este caso estamos frente a campos no lineales.

Volvamos a los campos lineales, en los que, como ya hemos visto, el estado más bajo de energía es igual a cero, lo cual significa que el campo no existe. Cierto o no? Cierto. Por el contrario, los campos no lineales, que tienen la peculiaridad de actuar sobre sí mismos, pueden encontrarse en su estado de energía más bajo y, sin embargo, continuar siendo uniformes, pero su valor es diferente a cero.

Al contrario de lo que podría esperarse, el punto en el que la potencia del campo es igual a cero se encuentra en la cima de una cresta. También es llamativo que los senos, es decir, los puntos que coinciden con la energía positiva o negativa mínima, se encuentren a la derecha y a la izquierda. Todavía sorprende otra cosa: en lugar de un estado mínimo de energía, existen dos. Estos dos senos corresponden a los dos lados de la cinta de goma. No olvidemos que ésta tiene una cara superior y otra inferior. Cada cara corresponde a un estado uniforme, no excitado. Ambos estados poseen exactamente la misma energía, pero son topológicamente diferentes.

Supongamos que un campo, se extiende por el espacio. Es posible que este campo se encuentre tarde o temprano en algún lugar en un estado que corresponda al seno izquierdo -energía negativa mínima-, mientras que en otro sitio se halle en el estado opuesto, energía positiva mínima. Sólo puede darse un contacto constante entre ambas zonas, si el campo pasa a través del cero en algún punto de la línea del centro, de modo que podría decirse que se eleva por encima de la cresta. Allí donde esto ocurre aparece una región limitada de energía del campo, que representa al solitón. Es similar al retorcimiento de la cinta de goma; se encuentra encerrada topológicamente entre las dos zonas físicamente diferentes de idéntica energía mínima. Naturalmente, no se debe abusar de la analogía con la cinta de goma, ya que en esta estructura el solitón únicamente puede moverse en una dimensión. Los campos reales, en cambio, se extienden a través del espacio tridimensional; a lo largo, ancho y alto. Para moverse en esta dimensión hay que emplear una topología mucho más compleja que en el caso de la cinta de goma.

Sin embargo, la idea esencial continúa siendo la misma: la configuración del campo contiene una región de energía encerrada topológicamente y limitada localmente, capaz de moverse en el espacio, pero que no puede liberarse por sí misma. Muchos físicos teóricos creen que tales solitones pueden ser considerados como una nueva especie de partículas subnucleares, partículas con propiedades interesantes y muy variadas. Si no se aplica un rigor excesivo, se podría incluso considerar solitones a los protones y neutrones normales: ondas únicas en el campo de la energía nuclear, en el campo de la interacción fuerte.

Cómo podría darse a conocer una partícula de onda única? Mostrando propiedades que no tengan las partículas normales. Un ejemplo clásico de esto fue descubierto a principios de los años setenta por Gerhardt Hooft, de la Universidad de Utrecht, y Alexander Polyakow, del Instituto de Física Teórica Landau, en Moscú. Hooft y Polyakow estaban estudiando un nuevo tipo de campo subnuclear -que podría ser el responsable de una potente fuerza nuclear- cuando descubrieron que dicho campo tenía multitud de estados mínimos de energía. El campo

podía estar retorcido y enmarañado entre dos estados. En algunas de estas configuraciones, el solitón resultante se comportaba como una carga magnética aislada.

Todos los imanes conocidos tienen un polo norte y otro sur, por lo que resultaría extraordinariamente llamativo un único polo. Sin embargo, nadie ha podido demostrar nunca la existencia de tal monopol magnético.

Pasémonos a la cuarta dimensión. Algunos físicos han añadido una nueva variable en sus elucubraciones matemáticas: el tiempo. Cómo puede explicarse un solitón en la cuarta dimensión? Un solitón cuatridimensional es una magnitud en el espacio y el tiempo, y tiene -por lo tanto- una existencia efímera. A pesar de ello, tales instantones, tal como se les denomina, juegan un papel importante en el mundo subatómico, permitiendo traspasos entre configuraciones de campos que anteriormente se consideraban imposibles o prohibidos. Dicho de un modo muy general, un campo de este tipo pasa de una configuración a otra, atravesando un retorcimiento.

De esta manera, hemos visto como los solitones han abierto unas posibilidades totalmente nuevas, precisamente en un campo que avanza paralelo al de la física de partículas. Me refiero a la cosmología. Así, por ejemplo, la gravitación es. una fuerza que se describe por medio de un campo no lineal. Esta no linealidad conduce a los más extraños estados de la fuerza de la gravedad, como son los agujeros negros, que podrían ser caracterizados como solitones gravitacionales. Algunos teóricos creen que, al comienzo del Universo, cuando aún eran mayúsculos los efectos cuánticos de la fuerza de la gravedad, fueron posibles los instantones de la fuerza de gravedad. Hay una teoría que incluso afirma que todo el universo debe su existencia únicamente a estas magnitudes, porque sólo ellas permitirían que el espacio y el tiempo hayan encontrado el camino desde la nada hasta la existencia, con ayuda de un retorcimiento. A pesar de que tales hipótesis continúan siendo vagas, es excitante que la onda única perseguida por Russell en el canal haya traído tantos conocimientos, que nos transportan hasta el nacimiento mismo de nuestro universo¹³.

Bibliografía

- [1.] R K Bullough. "*The Wave of excellence*", the solitary, progressive great wave of equilibrium of the fluid - an early history of the solitary wave", en Solitons, ed. M Lakshmanan, Springer Series in Nonlinear Dynamics, 1988, 150-281.
- [2.] O. Darrigol. "*The Spirited Horse, the Engineer, and the Mathematician: Water Waves in Nineteenth-Century Hydrodynamics*", Arch. Hist. Exact Sci. 58 (2003) 21-95.
- [3.] Alex D.D. Craik. "*The origins of water wave theory*", Annual Review of Fluid Mechanics (2004), Vol. 36, pp. 1-28.
- [4.] R. K. Bullough and P. J. Caudrey. "*Solitons and the Korteweg-De Vries equation: integrable systems 1834-1995*", Proceedings of the Conference on Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology, Heriot-Watt University, Edinburgh, July 10-14 1995, eds D B Duncan and J C Eilbeck, disponible en la red en <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/procs/>.
- [5.] G. B. Airy. "*On the laws of the tides on the coasts of Ireland, as inferred from an extensive series of observations made in connexion with the Ordnance Survey of Ireland (1844)*", Philos. Trans. R. Soc. London, 1845, 1-124.
- [6.] G. G. Stokes. "*1880-1905. Mathematical and Physical papers*", 5 vols, Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press.
- [7.] R. S. Ward. "*A historical introduction to solitons and Bäcklund transformations*" en Harmonic maps and

integrable systems, A. P. Fordy and J. C. Woods (eds.), Aspects in Mathematics, vol. E23, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1994. Disponible en la red en <http://www.amsta.leeds.ac.uk/Pure/staff/wood/FordyWood/contents.html>.

[8.] R. S. Ward. "*Sigma models in 2+1 dimensions*" en Harmonic maps and integrable systems, A. P. Fordy and J. C. Woods (eds.), Aspects in Mathematics, vol. E23, Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden, 1994. Disponible en la red en

<http://www.amsta.leeds.ac.uk/Pure/staff/wood/FordyWood/contents.html>.

[9.] N. J. Zabusky and M.D. Kruskal. "*Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*", Phys. Rev. Lett. 15 (1965), 240-243.

[10.] C. S. Gardner, J. M. Greene, M.D. Kruskal and R. M. Miura. "*Methods for solving the Korteweg-de Vries equation*", Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1095-1097

[11.] C. S. Gardner, J. M. Greene, M.D. Kruskal and R. M. Miura. "*The Korteweg-de Vries equations and generalizations VI. Methods for exact solution*", Commun. Pure Appl. Math. 27 (1974), 97-133.

[12.] S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii and V. E. Zakharov. "*Theory of solitons*", Plenum, NY, 1984.

[13.] Agüero, M. y J. Martínez. "*El misterio solitónico*", Ciencia ergo sum, Vol. 2, Núm. 2. Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, 1995.

[14.] Bishop, A. R. y T. Schneider. "*Solitons and Condensed Matter Physics*", Springer Verlag, New York, 1978.

[15.] Briggs, J. y F. D. Peat. "*Espejo y reflejo*", Editorial Gedisa, Barcelona, 1991.

[16.] Filippov, A. B. "*The Versatile Soliton*", Scientific American. Berlín, 2000.

[17.] González, F. I. "*Tsunamis*", Scientific American. May. 1999

<http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/>

[18.] Russell, S. "*Reporte del decimocuarto encuentro de la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia*", York, septiembre de 1844 (Londres), pp. 311-390, láminas xlvii-lvii

[19.] M. J. Ablowitz and P.A. Clarkson. "*Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*", London Math. Soc. 149, CUP, Cambridge, 1991

[20.] A. P. Fordy, ed. "*Soliton theory: a survey of results*", MUP, Manchester, 1990.