# El teorema de Napoleón

Mario Dalcín
Instituto de Profesores Artigas - Uruguay
Fecha de recepción: Mayo, 2005. Fecha de aceptación: Octubre, 2005

## Resumen

Presentamos seis demostraciones del teorema de Napoleón y de varias propiedades que se derivan de la misma configuración. En las demostraciones recurrimos a la geometría métrica, la geometría analítica, los números complejos, la trigonometría y las isometrías, alternativamente. Algunas de dichas demostraciones –no las propiedades– son originales, otras son el desarrollo de sugerencias esbozadas en distintos textos y otras son adaptaciones de las halladas en los textos.

**Palabras Clave:** Geometría Analítica, números complejos, Trigonometría, isometría, triángulos, congruencia, semejanza.

## Introducción

El teorema de Napoleón afirma que el triángulo determinado por los centros de los triángulos equiláteros construidos exteriormente sobre los lados de un triángulo cualquiera es equilátero. El resultado, muy mencionado en geometría, es escasamente trabajado en la enseñanza. Resultan poco conocidas distintas propiedades que se pueden observar en la misma configuración: igualdad de segmentos, concurrencia de rectas, concurrencia de circunferencias, triángulos distintos con un mismo baricentro. También es poco conocido que muchas de estas propiedades admiten justificaciones que sólo hacen uso de la matemática trabajada en bachillerato o en los primeros cursos universitarios y que por tanto podrían ser trabajadas a ese nivel.

Parece ser que Napoleón era aficionado a la Geometría. Señales de ello son algunos problemas que le propuso a los matemáticos franceses:

- Dividir una circunferencia en cuatro partes iguales usando sólo compás.
- Usando sólo compás ubicar el centro de una circunferencia.

Posiblemente sus conocimientos matemáticos no le permitieran resolverlos así como es muy probable que el Teorema de Napoleón haya sido un regalo de sus amigos matemáticos Monge, Lagrange o Mascheroni.

Lo cierto es que la configuración del teorema de Napoleón: triángulos equiláteros construidos exteriormente sobre los lados de un triángulo cualquiera, ha sido fuente de inspiración de interesantes observaciones matemáticas. Veamos como una vez mas la belleza en matemática surge de lo sorprendente. Y también al reves.

## Primeras observaciones

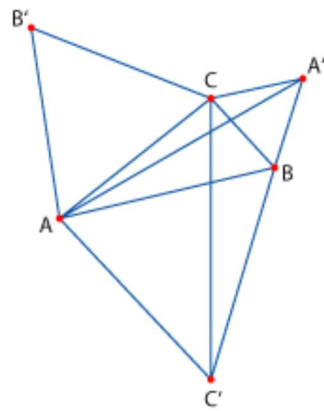
Dado $\triangle ABC$ un triangulo cualquiera. Se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $\triangle ABC'$ , $\triangle BCA'$

y $\triangle CAB'$ . Bajo estas condiciones se cumple que:

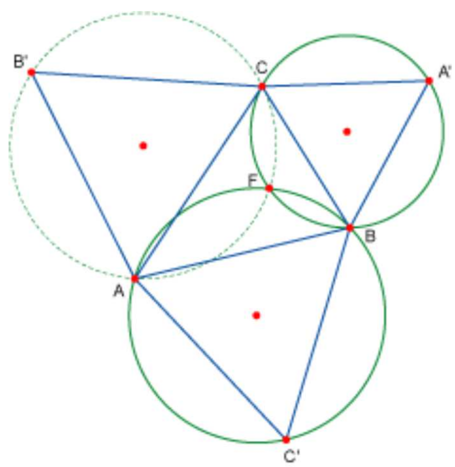
- Los segmentos $\overline{AA'}$ , $\overline{BB'}$ , $\overline{CC'}$ son congruentes.

Se deduce que los triángulos $\triangle ABA'$ y $\triangle C'BC$ son congruentes por tener $\overline{AB} = \overline{C'B} = \overline{BC}$ y $m\sphericalangle ABA' = m\sphericalangle C'BC = 60 + m\sphericalangle ABC$ , de donde $\overline{AA'} = \overline{C'C}$ .

De forma análoga son congruentes $\triangle ACA'$ y $\triangle B'CB$ por lo que $\overline{AA'} = \overline{B'B}$ .



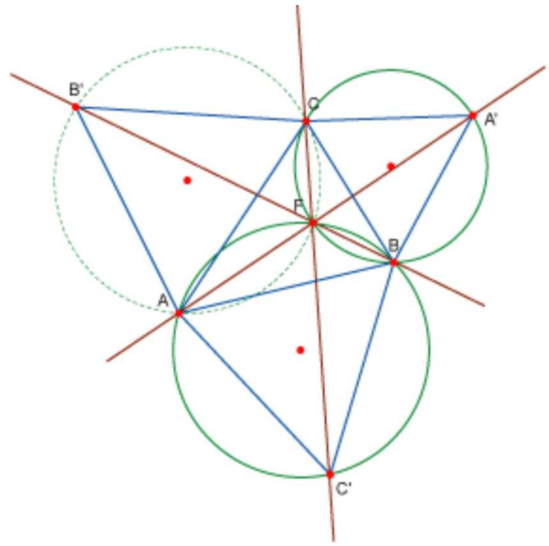

- Los círculos circunscritos a los triángulos $\triangle ABC'$ , $\triangle BCA'$ , $\triangle CAB'$ pasan por un mismo punto.




Si $\triangle ABC' \cap \triangle BCA' = \{B, F\}$ , como $m\sphericalangle AC'B = 60°$ se tiene $m\sphericalangle AFB = 120°$ y como $m\sphericalangle BA'C = 60$ se tiene: $m\sphericalangle BFC = 120°$ por lo que $m\sphericalangle AFC = 120°$ y como $m\sphericalangle AB'C = 60°$ se deduce que el cuadrilátero $AFCB'$ es inscriptible de donde $F \in ACB'$ .

Para completar la demostración debemos considerar el caso en que $F$ es exterior a $\triangle ABC$ y también el caso en que $F$ coincide con $B$ .

- Las rectas $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ son congruentes en $F$ y forman $60°$ entre ellas.




$$\triangle ABC' \cap \triangle BCA' = \{B, F\}$$

$m\sphericalangle AFB = 120°$ y $m\sphericalangle BFA' = \sphericalangle BCA' = 60°$ por ser ángulos inscritos que abarcan la misma cuerda $\overline{BA'}$ de donde: $m\sphericalangle AFA' = m\sphericalangle AFB + m\sphericalangle BFA' = 180°$ por lo que $A, F, A'$ están alineados.

De forma análoga $B, F, B'$ y $C, F, C'$ están alineados.

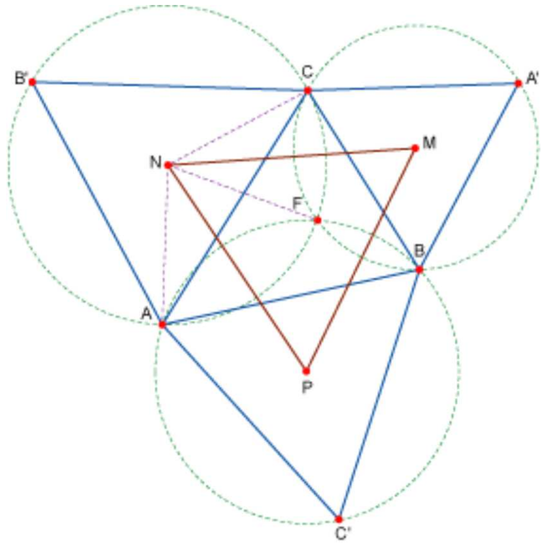
La demostración quedará completa considerando el caso en que $F$ es exterior a $\triangle ABC$ y también el caso en que $F$ coincide con $B$.

**El teorema de Napoleón. Tres miradas**

$\triangle ABC$ triángulo cualquiera. Se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $\triangle ABC'$, $\triangle BCA'$ y $\triangle CAB'$. Los centros de estos triángulos equiláteros determinan un nuevo triángulo equilátero.

**Primera demostración**

Sean $M, N, P$ los centros de los triángulos equiláteros.




Si $\triangle ABC' \cap \triangle BCA' = \{B, F\}$ , se cumple que:

$\overline{NP}$ es mediatriz de $\overline{AF} \Longrightarrow m\sphericalangle ANP = m\sphericalangle PNF$

$\overline{MN}$ es mediatriz de $\overline{FC} \Longrightarrow m\sphericalangle MNC = m\sphericalangle FNM$

de lo anterior:

$m\sphericalangle ANC = 2 \cdot m\sphericalangle PNM \Longrightarrow m\sphericalangle PNM = 60$ .

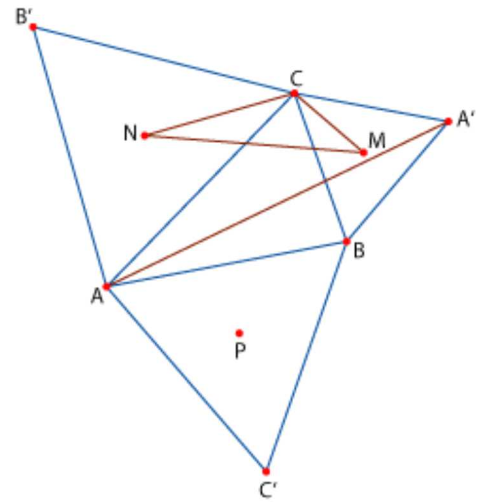
Procediendo de la misma forma con otro de los ángulos vemos que $\triangle MNP$ es equilátero.

**Segunda demostración**

Los triángulos $\triangle ACA'$ y $\triangle NCM$ son semejantes por tener una pareja de ángulos congruentes y dos pares de lados proporcionales:

$m\sphericalangle ACA' = m\sphericalangle NCM = m\sphericalangle ACB + 60$

$\frac{\overline{NC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{A'C}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ por lo tanto se cumple: $\frac{\overline{NM}}{\overline{AA'}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . (1)




Por el teorema de las Medianas en $\triangle BAB'$ , $\triangle PAN$ y $\triangle CBC'$ , $\triangle MBP$

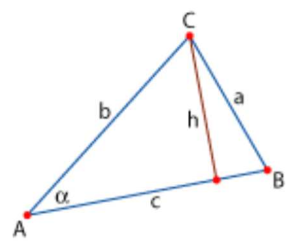
tendríamos $\frac{\overline{NM}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{CC'}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ por lo tanto se cumple: $\frac{\overline{NM}}{\overline{AA'}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .(2)

y como $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$ (primeras observaciones) de (1) y (2) se tiene que $\overline{NM} = \overline{PNMP}$ .

**Tercera demostración**

Aplicando el teorema del coseno en $\triangle ABC$ :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$




Siendo $h$ la altura de $\triangle ABC$ : correspondiente al vértice $C$ :

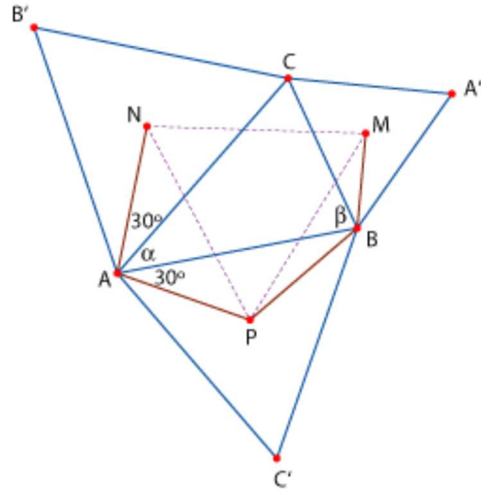
$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \Longrightarrow b \cdot \sin(\alpha)$$

por lo que

$$\text{área } \triangle ABC = \nabla = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c \cdot b \sin\alpha}{2} \Longrightarrow \sin(\alpha) = \frac{2 \cdot \nabla}{b \cdot c} \text{ (2)}$$

En $\triangle MNP$ : $m\overline{AN} = \frac{b\sqrt{3}}{3}$

$$m\overline{AP} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$$




Aplicando el teorema del coseno en $\triangle NAP$ :

$$\overline{NP}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \cos(\alpha + 60°) \;=\; \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{3} \cdot \cos(\alpha + 60°)$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha + 60°)}{3} \quad (3)$$

$$\cos(\alpha + 60°) = \cos(\alpha) \cdot \cos(60°) - \sin(\alpha) \cdot \sin(60°)$$

y usando las igualdades obtenidas en $(1)$ y $(2)$ podemos escribir:

$$\cos(\alpha + 60°) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2\triangledown}{bc} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (4)}$$

sustituyendo $(4)$ en $(3)$ y simplificando llegamos a:

$$\overline{NP}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\triangledown\sqrt{3}}{6}$$

Procediendo de la misma forma podemos afirmar:

$$\cos(\alpha) \;=\; \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\sin(\beta) \;=\; \frac{2\triangledown}{ac}$$

Aplicando el teorema del coseno en $\triangle MBP$ :

$$\begin{aligned}\overline{MP}^2 &= \overline{BM}^2 + \overline{BP}^2 - 2 \cdot \overline{BM} \cdot \overline{BP} \cdot \cos(\beta + 60°) \\ &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}^2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{3} \cdot \cos(\beta + 60°) \\ &= \frac{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta + 60°)}{3}\end{aligned}$$

que luego al sustituir $\cos(\beta + 60°)$ y simplificar queda:

$$\overline{MP}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\triangledown\sqrt{3}}{6}$$

De idéntica forma podemos obtener

$$\overline{MN}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\triangledown\sqrt{3}}{6}$$

lo que nos permite afirmar que el triángulo $\triangle MNP$ es equilátero.

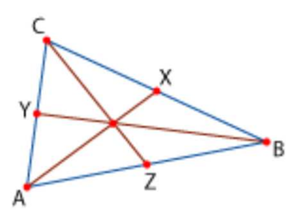
Otras tres demostraciones alternativas se pueden encontrar al final.

**Nuevas observaciones**

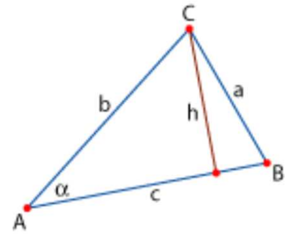
Las rectas $\overleftrightarrow{AM}$ , $\overleftrightarrow{BN}$ , $\overleftrightarrow{CP}$ son concurrentes.

Para demostrar esta propiedad necesitaremos del teorema de Ceva:

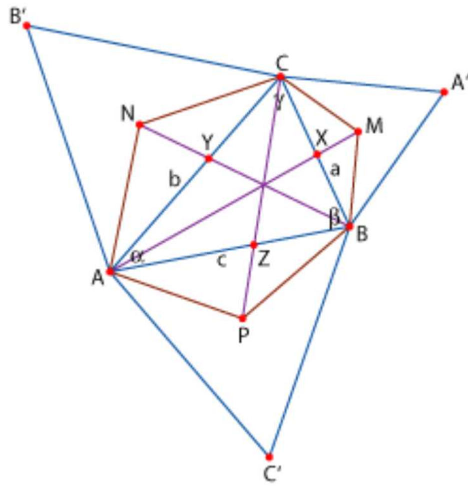
$X, Y, Z$ son puntos sobre los lados $\overline{BC}$ , $\overline{CA}$ , $\overline{AB}$ de un triángulo $\triangle ABC$ . $\overleftrightarrow{AX}$ , $\overleftrightarrow{BY}$ , $\overleftrightarrow{CZ}$ son concurrentes $\iff \left(\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1\right)$




También usaremos, según vimos previamente, que el área $\triangle ABC = \frac{bc \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$




En nuestra figura:




$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{\text{área }(\triangle ABM)}{\text{área }(\triangle ABM)}$$

$$= \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BM}\cdot\text{sen}(\beta+30°)}{\overline{AC}\cdot\overline{CM}\cdot\text{sen}(\gamma+30°)}$$

$$= \frac{c\cdot\text{sen}(\beta+30°)}{b\cdot\text{sen}(\gamma+30°)}$$

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\text{área }(\triangle BCN)}{\text{área }(\triangle BAN}$$

$$= \frac{\overline{BC}\cdot\overline{CN}\cdot\text{sen}(\gamma+30°)}{\overline{BA}\cdot\overline{AN}\cdot\text{sen}(\alpha+30°)}$$

$$= \frac{a\cdot\text{sen}(\gamma+30°)}{c\cdot\text{sen}(\alpha+30°)}$$

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{AB}} = \frac{\text{área }(\triangle CAP)}{\text{área }(\triangle CBP)}$$

$$= \frac{\overline{CA}\cdot\overline{AP}\cdot\text{sen}(\alpha+30)}{\overline{CB}\cdot\overline{BP}\cdot\text{sen}(\beta+30°)}$$

$$= \frac{b \cdot \text{sen}(\alpha + 30°)}{b \cdot \text{sen}(\beta + 30°)}$$

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{XB}} = \frac{\text{área } (\triangle CAP)}{\text{área } (\triangle CBP)}$$

$$= \frac{\overline{CA} \cdot \overline{AP} \cdot \text{sen}(\alpha + 30°)}{\overline{CB} \cdot \overline{BP} \cdot \text{sen}(\beta + 30°)}$$

$$= \frac{b \cdot \text{sen}(\alpha + 30°)}{a \cdot \text{sen}(\beta + 30°)}$$

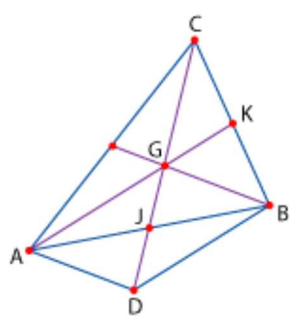
si calculamos

$$\left(\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\right) = \frac{[b \cdot \text{sen}(\alpha + 30°)] \cdot [c \cdot \text{sen}(\beta + 30°)] \cdot [a \cdot \text{sen}(\gamma + 30°)]}{[a \cdot \text{sen}(\beta + 30°)] \cdot [b \cdot \text{sen}(\gamma + 30°)] \cdot [c \cdot \text{sen}(\alpha + 30°)]}$$

$$= 1$$

por el teorema de Ceva: $\overrightarrow{AX}$ , $\overrightarrow{BY}$ , $\overrightarrow{CZ}$ concurren, y $\overrightarrow{AM}$ , $\overrightarrow{BN}$ , $\overrightarrow{CP}$ concurren

- Bajo la notación dada en el Teorema de Napoleón, el $\triangle MNP$ y el $\triangle ABC$ tienen el mismo baricentro.




Siendo $G$ el baricentro del triángulo $\triangle ABC$ se cumplen las siguientes relaciones entre vectores:

i.) $v(\overrightarrow{GA}) + v(\overrightarrow{GB}) + v(\overrightarrow{GC}) = 0$

Sea $J$ el punto medio de las diagonales $\overline{AB}$ y $\overline{GB}$ del paralelogramo $AGBD$

Se cumple:

$$v(\overrightarrow{GA}) + v(\overrightarrow{GB}) = v(\overrightarrow{GD}) = 2 \cdot v(\overline{GJ})$$

Por ser $G$ baricentro también se cumple:

$$v(\overrightarrow{GC}) = -2 \cdot v(\overline{GJ})$$

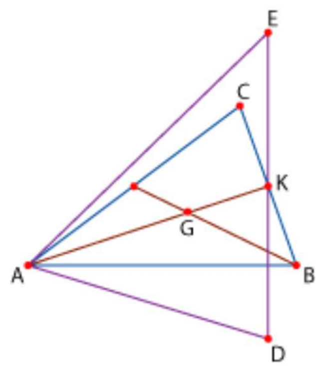
De lo anterior:

$$v(\overrightarrow{GA}) + v(\overrightarrow{GB}) + v(\overrightarrow{GC}) \; = \; 2 \cdot v(\overrightarrow{GJ}) - 2 \cdot v(\overrightarrow{GJ}) \; = \; 0$$

ii.) $v(\overrightarrow{AG}) = \frac{1}{3} \cdot v(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$$v(\overrightarrow{AB}) + v(\overrightarrow{AC}) \; = \; 2 \cdot v(\overrightarrow{AK}) = 3 \cdot v(\overrightarrow{AG})$$

$$\Longrightarrow v(\overrightarrow{AG}) \; = \; \frac{1}{3} \cdot v(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$




iii.) Siendo $P$ un punto cualquiera:

$$v(\overrightarrow{PG}) = \frac{1}{3} \cdot v(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

Si $E$ cumple que $K$ (el punto medio de $\overline{BC}$ ) es punto medio de $\overline{PE}$ , se cumple que $G$ también es baricentro de $\triangle PAE \Longrightarrow$ aplicando $(ii)$ al triángulo $\triangle PAE$ tenemos:

$$v(\overrightarrow{PG}) = \frac{1}{3} \cdot v(\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PE}) = \frac{1}{3} \cdot v(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PE}) = \frac{1}{3} \cdot v(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

En nuestra construcción

$$v(\overrightarrow{GM}) = \frac{1}{3} \cdot v(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA'}) = \frac{1}{3} \cdot v(-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'}) = \frac{1}{3} \cdot v(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'}) = \frac{1}{3}$$

de la misma forma

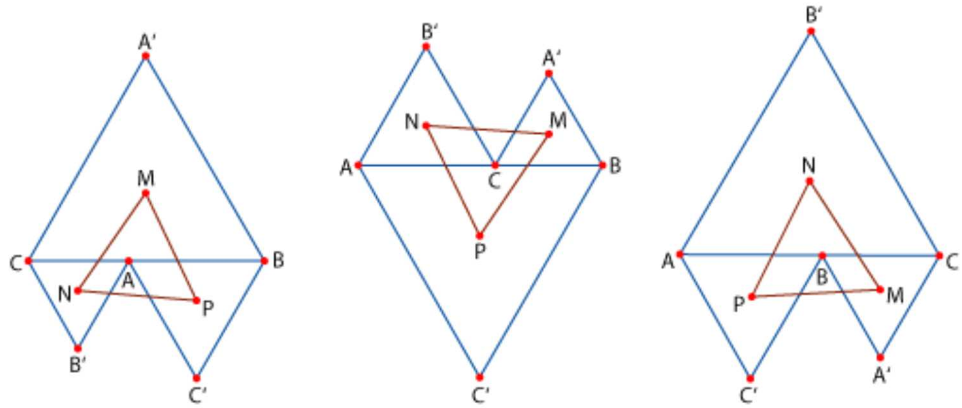
$$v(\overrightarrow{GN}) \; = \; \frac{1}{3} \cdot v(\overrightarrow{BB'})$$

$$v(\overrightarrow{GP}) \; = \; \frac{1}{3} \cdot v(\overrightarrow{CC'})$$

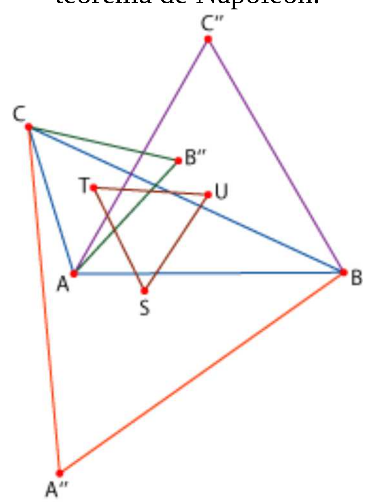
$G$ es circuncentro de $\triangle MNP$ equilátero, por lo que $G$ también es su baricentro

**Una vuelta de tuerca. O dos**

Las propiedades vistas hasta el momento y en especial el teorema de Napoleón, se siguen cumpliendo si $A$ , $B$ y $C$ son colineales




Si construimos los triángulos equiláteros $\triangle BCA''$ , $\triangle CAB''$ y $\triangle ABC''$ de centros $S$ , $T$ , $U$ respectivamente simétricos a los triángulos equiláteros $\triangle BCA'$ , $\triangle CAB'$ y $\triangle ABC'$ que se habían construido exteriores al triángulo $\triangle ABC$ , se siguen cumpliendo las propiedades vistas hasta el momento, incluyendo el teorema de Napoleón.




Aplicando el teorema del coseno en $\triangle ABC$ :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

de donde

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Siendo $h$ la altura de $\triangle ABC$ correspondiente al vértice $C$ :

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{h}{b} \Longrightarrow h = b \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

por lo que

$$\text{área } \triangle ABC = \nabla = \frac{c\cdot h}{2} = \frac{c\cdot h\cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{2} \Longrightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2\cdot\nabla}{b\cdot c}$$

En $\triangle TAU$ :

$$\begin{aligned} m\overline{AT} &= \frac{b\sqrt{3}}{3} \\ m\overline{AU} &= \frac{c\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

El teorema del coseno en $\triangle TAU$ :

$$\begin{aligned} \overline{TU}^2 &= \overline{AT}^2 + \overline{AU}^2 - 2\cdot\overline{AT}\cdot\overline{AU}\cdot\cos(\alpha - 60^\circ) \\ &= \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\cos(\alpha - 60^\circ) \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(\alpha - 60^\circ)}{3} \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - 60^\circ) = \cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(60^\circ) + \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(60^\circ)$$

$$\cos(\alpha - 60^\circ) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2\nabla}{bc}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

sustituyendo en $\overline{TU}^2$ y simplificando llegamos a:

$$\overline{TU}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4\nabla\sqrt{3}}{6}$$

Procediendo de la misma forma podemos afirmar:

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \operatorname{sen}(\beta) &= \frac{2\nabla}{ac} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del coseno en $\triangle SBU$ y observando que

$$m\sphericalangle SBU = (m\sphericalangle SBA + m\sphericalangle ABC) + m\sphericalangle CBU = 30° + (30° - \beta) = 60° - \beta$$

$$\begin{aligned} \overline{SU}^2 &= \overline{BS}^2 + \overline{BU}^2 - 2 \cdot \overline{BS} \cdot \overline{BU} \cdot \cos(60° - \beta) \\ &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{3} \cdot \cos(60° - \beta) \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4\triangledown\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

que luego de sustituir y simplificar queda:

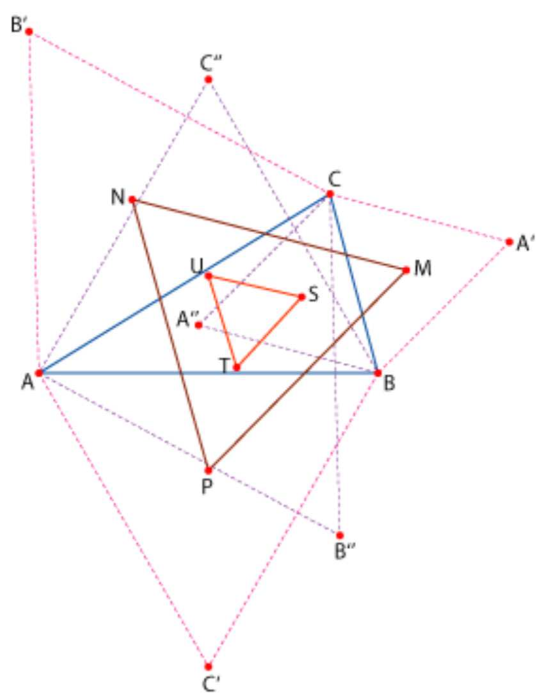
$$\overline{SU}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4\triangledown\sqrt{3}}{6}$$

de forma similar podemos obtener:

$$\overline{ST}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4\triangledown\sqrt{3}}{6}$$

**Sorpresa!**

La diferencia de las áreas del triángulo de Napoleón exterior $\triangle MNP$ y del triángulo de Napoleón interior $\triangle STU$ de un triángulo $\triangle ABC$ es igual al área del $\triangle ABC$ .




Bajo la notación utilizada por lo visto en la tercera demostración del teorema de Napoleón el cuadrado del lado del triángulo $\triangle MNP$ equilátero mide $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\triangledown\sqrt{3}}{6}$ donde $\triangledown$ es el área del triángulo $\triangle ABC$ .

De acuerdo a lo ya visto, el cuadrado del lado del triángulo de Napoleón $\triangle STU$ mide $\frac{a^2+b^2+c^2-4\nabla\sqrt{3}}{6}$ donde $\triangle$ es el área del triángulo $\triangle ABC$ .

Recordando que el área de un triángulo equilátero de lado $k$ es $\frac{k^2\sqrt{3}}{4}$ tenemos:

$$\text{área}\,\triangle\,MNP \;=\; \frac{a^2+b^2+c^2+4\nabla\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{área}\,\triangle\,STU \;=\; \frac{a^2+b^2+c^2-4\nabla\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Si calculamos la diferencia de dichas áreas:

$$\text{área}\,\triangle\,MNP-\text{área}\,\triangle\,STU=\frac{a^2+b^2+c^2+4\nabla\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{a^2+b^2+c^2-4\nabla\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\nabla=\text{área}\,\triangle\,ABC$$

**Tres nuevas miradas al teorema de Napoleón**

**Cuarta demostración**

Demostraremos que la composición de tres rotaciones con centros no alineados, del mismo sentido y donde la suma de los ángulos de rotación sea $360$ es la identidad.
Para ello consideremos la composición de las rotaciones de centros en los vértices de un triángulo, ángulos el doble de cada ángulo respectivo del triángulo y del mismo sentido las tres.
Para indicar una rotación usaremos la siguiente notación: $R_{O,\alpha,horario}$ , donde $O$ indica el sentido horario o rotación, $\alpha$ la medida del ángulo de rotación y a continuación se indicara el sentido horario o anti-horario. Usaremos además que toda rotación es la composición de dos simetrías axiales de ejes secantes en el centro de rotación y que el ángulo que forman entre ellas es la mitad del ángulo de rotación.

$$\begin{aligned} R_{A,2\alpha,horario}\;O\;R_{B,2\beta,horario}\;O\;R_{C,2\gamma,horario} &= S_{AC}\;O\;S_{AB}OS_{BC}\;O\;R_{C,2\gamma,horario} \\ &= S_{AC}\;O\;S_{BC}\;O\;R_{C,2\gamma,horario} \\ &= R_{C,2\gamma,antihorario}\;O\;R_{C,2\gamma,horario} \\ &= \text{Identidad} \end{aligned}$$

En nuestra construcción

$$R_{M,120^\circ,horario}\;O\;R_{N,120,horario}\;\varnothing\;R_{P,120^\circ,horario}=\text{Identidad}$$

y como las isometrías con la composición de funciones forman grupo, podemos escribir

$$R_{M,120,horario} \ O \ R_{N,120°,horario} = R_{P,120°,antihorario}$$
$$S_r \ O \ S_{MN} \ O \ S_{MN} \ O \ S_S = R_{P,120°,antihorario}$$

donde el ángulo de (r) y MN es $60°$ y
el ángulo de NM y (s) es $60°$.

Si $(r) \cap (s) = J$ :

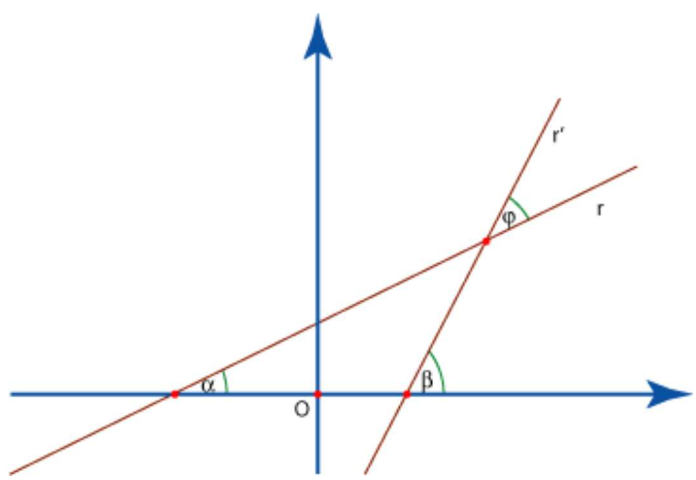
$$R_{J,120°,antihorario} = R_{P,120°,antihorario}$$

de donde debe ser J=P,
por lo que $\triangle MNP$ es equilátero. (Demostración tomada de Ledergerber-Ruoff,pp.128-129)

**Quinta demostración**

Usaremos ahora la geometría analítica para hacer una nueva demostración del teorema de Napoleón.
Empecemos recordando la relación que vincula a la tangente del ángulo que forma dos rectas con sus respectivos coeficientes angulares.
Si las rectas $r$ y $r'$ tienen coeficientes angulares $m$ y $m'$, siendo $m = tang\alpha$, $m' = tang\beta$ y $\alpha$ y $\beta$ las medidas de los ángulos que forman las rectas $r$ y $r'$ con el eje $x$, el ángulo $(\vartheta)$ entre las dos rectas $r$ y $r'$ está dado por la relación:

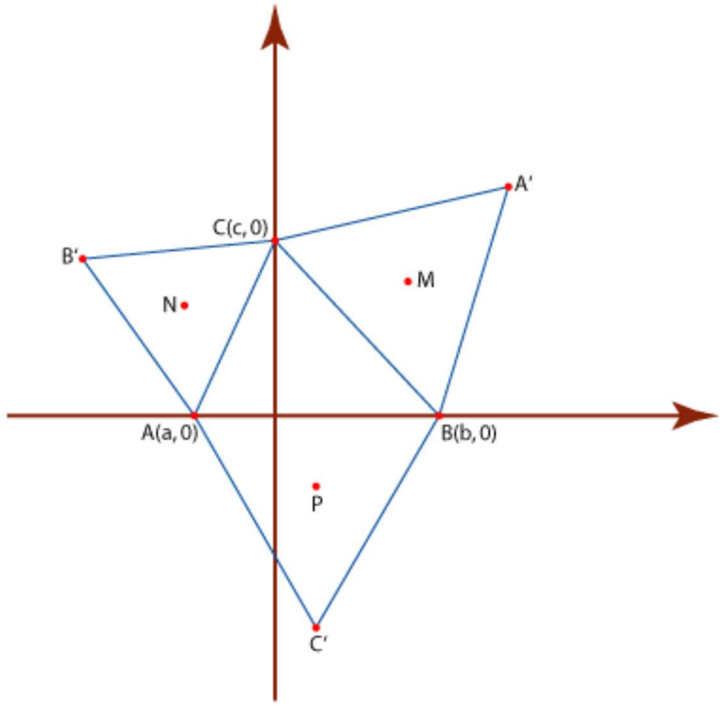
$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$




Sin pérdida de generalidad podemos asignarle a los vértices el triángulo $\triangle ABC$ las coordenadas $A(a,0), B(b,0)$ y $C(0,c)$.

Si llamamos $m'$ al coeficiente angular de la recta $\overline{BC}$, se cumple que $m' = \frac{-c}{b}$.

El ángulo que forman las rectas $\overline{BA'}$ y $\overline{BC}$ es $60°$ y $\tan 60° = \sqrt{3}$.




Aplicando la relación previamente expuesta, si llamamos $m$ al coeficiente angular de la recta $\overline{BA'}$, podemos hallar $m$ a partir de la ecuación:

$\dfrac{\frac{-c}{b}}{1-\frac{cm}{b}}=\sqrt{3}$, obteniendo así que $m=\dfrac{c+b\sqrt{3}}{c\sqrt{3}-b}$ .

La ecuación de la recta $\overline{BA'}$ es entonces:

$$\overline{BA'}: y=\left(\frac{b\sqrt{3}+c}{-b+c\sqrt{3}}\right)\cdot(x-b)$$

Procediendo de forma análoga podemos hallar la ecuación de la recta $\overline{CA'}$ :

$$\overline{CA'}: y=\left(\frac{b\sqrt{3}-c}{b+c\sqrt{3}}\right)\cdot x+c$$

Resolviendo el sistema formado formado por las ecuaciones de las rectas $\overline{BA'}$ y $\overline{CA'}$ obtenemos las coordenadas del punto $A'$

$$A'\left(\frac{b+c\sqrt{3}}{2},\frac{b\sqrt{3}+c}{2}\right),$$

Repitiendo el procedimiento seguido para determinar el punto $A'$ podemos hallar las coordenadas del punto $B'$ intersecando las rectas

$$\overline{CB'}: y=\left(\frac{a\sqrt{3}+c}{-a+c\sqrt{3}}\right)\cdot x+c$$

y

$$\overline{AB'}: y=\left(\frac{a\sqrt{3}-c}{a+c\sqrt{3}}\right)\cdot(x-a)$$

obteniendo $B'\left(\dfrac{a-c\sqrt{3}}{2},\dfrac{-a\sqrt{3}+c}{2}\right)$ .

Intersecando las rectas
$\overline{AC'}: y = -\sqrt{3}(x-a)$ y $\overline{BC'}: y = \sqrt{3}(x-b)$

obtenemos las coordenadas de $C'$
$C'\left(\frac{a+b}{2}, \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}\right)$.

Recordando ahora que si los vertices de un triángulo $\triangle ABC$ tiene coordenadas $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$, el baricentro de dicho triángulo tiene coordenadas:

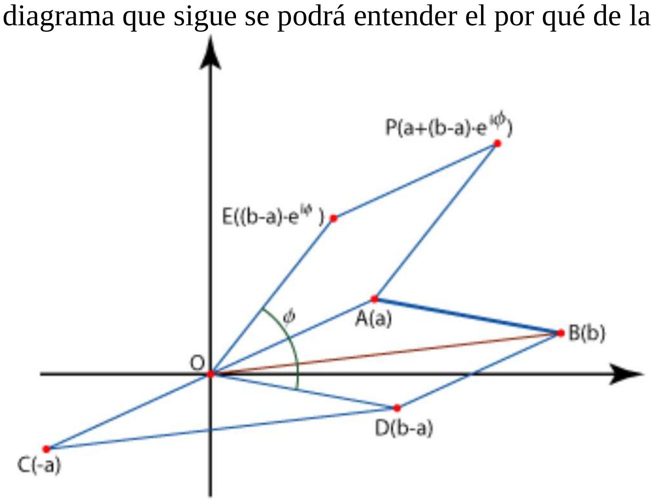
$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

podemos hallar las coordenadas de:
$M\left(\frac{3b + c\sqrt{3}}{6}, \frac{b\sqrt{3} + 3c}{6}\right)$, $N\left(\frac{3a - c\sqrt{3}}{6}, \frac{-a\sqrt{3} + 3c}{6}\right)$, $P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}\right)$,

Por último calcular las distancias
$m\overline{MN} = m\overline{NP} = m\overline{PM} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3(a^2+b^2+c^2) - ab - c(b-a)\sqrt{3}}$.

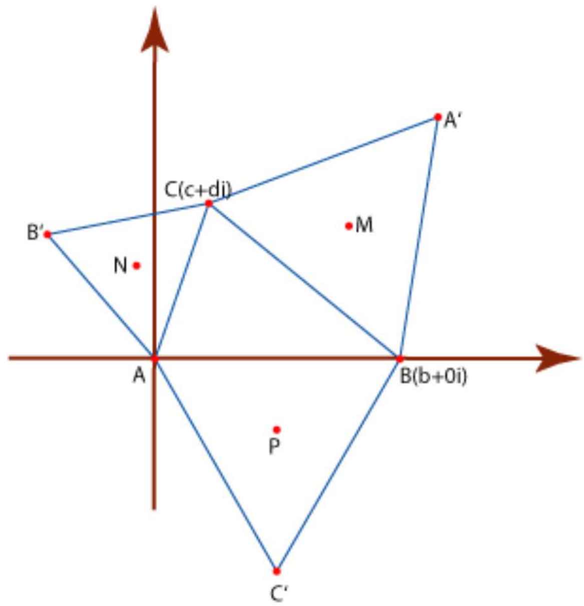
**Sexta demostración**

Recurriendo a los números complejos para hacer una nueva demostración del teorema de Napoleón.
"Asociaremos al numero complejo $z = x + iy$, en que $x$ y $y$ son reales e $i$ es la unidad imaginaria, el punto $Z$ con coordenadas rectangulares $(x, y)$ en un plano cartesiano. El punto $Z$ se denominara imagen, o punto representativo, del numero complejo $z$ y dicho numero recibirá el nombre de afijo, o coordenada compleja, del punto $Z$."(Eves, 1985, pag.167)
Necesitaremos también el siguiente teorema: *"Si $A$ y $B$ son puntos con afijos $a$ y $b$, respectivamente, entonces $p = a + (b-a) \cdot e^{i\phi}$ es el afijo del punto $P$ obtenido girando un ángulo $\phi$ el punto $B$ alrededor del punto $A$."* (Eves, 1985, pág 174)
Viendo el diagrama que sigue se podrá entender el por qué de la condición.



Para el caso en que $\phi = 60^{\circ}$ el teorema anterior nos da una condición necesaria y suficiente para que un triángulo $\triangle ABP$ sea equilátero, y dicha condición es que los afijos $a$, $b$ y $p$ de sus vértices (sus coordenadas complejas) verifiquen la condición $p = a + (b - a) \cdot e^{i\phi}$ .

Asignándole un número complejo a cada vértice del triángulo podemos considerar sin perdida de generalidad:




Si $x$, $y$, $z$ son los afijos de $A$, $B$ y $C$ respectivamente $(x = 0, y = b, z = c + di)$, los afijos $x'$, $y'$, $z'$ de los puntos $A'$, $B'$, $C'$ serán:

$$x' = z + (y - z) \cdot e^{\frac{i\Pi}{3}} = (c + di) + (b - c - di)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{b + c + d\sqrt{3}}{2} + \frac{(b\sqrt{3} - c\sqrt{3} + d)i}{2}$$

$$y' = z \cdot e^{\frac{i\Pi}{3}} = (c + di) \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{c - d\sqrt{3}}{2} + \frac{(c\sqrt{3} + d)i}{2}$$

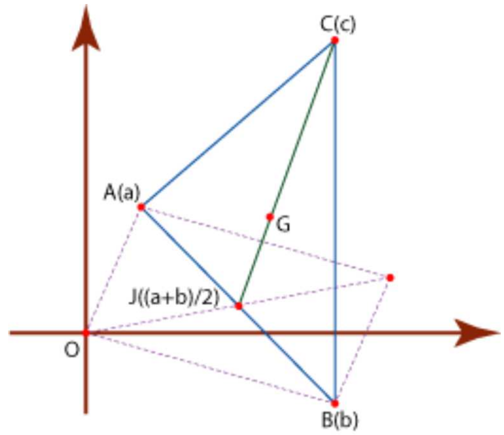
$$z' = y \cdot e^{-\frac{i\Pi}{3}} = b \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{b}{2} - \frac{(b\sqrt{3})i}{2} .$$

Llegados aquí necesitamos de otro teorema: ``*El centroide $G$ del triángulo $\triangle ABC$ tiene como afijo* $g = \frac{(a + b + c)}{3}$ .″ (Eves, 1985, pág 176)

Si $a$, $b$, $c$ son los afijos de $A$, $B$ y $C$, el punto $J$ medio de $\overline{AB}$ tiene como afijo $\frac{(a + b)}{2}$. Como el baricentro $G$ verifica que $\frac{m\overline{CG}}{m\overline{GJ}} = 2$, se cumple la siguiente relación entre los afijos de $C$, $G$ y $J$:

$$\frac{(g - c)}{(a + b)/2 - g} = 2$$

Despejando concluimos que $g = \frac{(a+b+c)}{3}$ .




Usando la condición anterior podemos hayan los afijos $m$ , $n$ , $p$ de los puntos $M$ , $N$ , $P$ baricentros de los triángulos $\triangle BCA'$ , $\triangle CAB'$ y $\triangle ABC'$ respectivamente.

$$m = \frac{x'+y+z}{3} = \frac{3b+3c+d\sqrt{3}}{6} + \frac{(b\sqrt{3}-c\sqrt{3}+3d)i}{6} \text{ (1)}$$

$$n = \frac{x+y'+z}{3} = \frac{3c-d\sqrt{3}}{6} + \frac{(c\sqrt{3}+3d)i}{6}$$

$$p = x+y+z' = \frac{3b}{6} - \frac{(\sqrt{3})i}{6}$$

Si hallamos ahora, usando la condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea equilátero mencionada antes, el afijo (coordenada compleja) del tercer vértice del triángulo equilátero de vértices $N$ y $P$ tenemos:

$$n + (p-n)\cdot e^{\frac{i\Pi}{3}} =$$

$$= n + \left[\frac{3b}{6} - i\frac{b\sqrt{3}}{6} - \left(\frac{3c-d\sqrt{3}}{6} + \frac{c\sqrt{3}+3d}{6}i\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= n + \left(\frac{3b-3c+d\sqrt{3}}{6} - \frac{b\sqrt{3}+c\sqrt{3}+3d}{6}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{3c-d\sqrt{3}}{6} + \frac{c\sqrt{3}+3d}{6}i\right)\cdot\left(\frac{3b+2d\sqrt{3}}{6} + \frac{b\sqrt{3}-2c\sqrt{3}}{6}i\right) =$$

$$= \frac{3b+3c+d\sqrt{3}}{6} + \frac{b\sqrt{3}-c\sqrt{3}+3d}{6}i$$

que es el afijo del punto $M$ hallado antes en (1).
Podemos concluir entonces que $\triangle MNP$ es equilátero. (Demostración sugerida en de Guzmán, 1995,p.341)

**Epílogo**

Dijimos en la introducción que la configuración del teorema de Napoleón: triángulos equiláteros construidos exteriormente sobre los lados de un triángulo cualquiera, había sido fuente de inspiración de interesantes observaciones matemáticas. Agregamos: Y lo sigue siendo. Como muestra de lo que decimos puede verse el artículo de Boutte (2002).

**Bibliografía**


[1] Boutter, G. 2002. The Napoleón Configuration. Forum Geometricorum, Volumen 2, pp.39-46. http://forumgeom.fau.edu/

[2] Coxeter, H. S. M. 1984. Fundamentos de geometria. México: Limusa.

[3] Coxeter, H. S. M. y Greitzer, S. L. 1967. Geometry Revisited. U.S.A.: The Mathematical Association of America.

[4] De Guzmán, M. 1995. Para pensar mejor. España: Pirámide.

[5] Eves, H. 1985. Estudio de las Geometrías. Tomo 2. México: Uteha.
[6] Eves, H. 1985. Introducáo á historia da matemática. Brasil: Editora da Unicamp.

[7] F.G.M. 1912. Circo matemático. España: Alianza.

[8] Jackiw, N. 1991. The Geometer's Sketchpad (software). U.S.A.: Key Curriculum Press.

[9] Ledergerber-Ruoff, E.B. 1982. Isometricas e Ornamentos no plano Euclidiano. Brasil: Atual Editora y Editora da USP.