Reglas de divisibilidad

[Alejandro Jenkins Villalobos]
Depto. de Física, Instituto Tecnológico de California
Pasadena, California, EE. UU.
Fecha de recepción: Mayo, 2005. Fecha de aceptación: Octubre, 2005

Resumen:

En esta nota explicamos en qué consisten las "reglas de divisibilidad," reseñamos las más conocidas y demostramos su validez. Luego formulamos y demostramos dos reglas menos familiares (para divisibilidad por 7 y por 13). Concluimos con la demostración de un sistema general para construir reglas de divisibilidad por cualquier entero mayor que 10 que no sea múltiplo de 2 o de 5. Esta nota está dirigida principalmente a alumnos y profesores de enseñanza secundaria que tengan interés en comprender la lógica de las reglas de divisibilidad, tema que casi siempre se menciona en los cursos regulares de matemáticas pero que rara vez se explora con detenimiento.

In this note we explain what divisibility rules are, discuss the best-known ones, and demonstrate their validity. We then state and prove two less familiar rules (the ones for divisibility by 7 and by 13). We conclude with a proof of a general way to build divisibility rules for any integer greater than 10 that is not a multiple of 2 or 5. This note is intended primarily for students and teachers in secondary school who have an interest in understanding the logic of divisibility rules, a topic which is often mentioned in the regular mathematics courses, but which is rarely explored in detail.

Palabras Clave: Divisibilidad, Álgebra, Algoritmos, Teoría de Números

Introducción

¿Dónde está la sabiduría que perdimos en el conocimiento?
¿Dónde está el conocimiento que perdimos en la información?

-T. S. Eliot, "The Rock" [1]

Una regla de divisibilidad es un procedimiento (o, si deseamos utilizar el término técnico, un *algoritmo*[1] que determina s un número entero es divisible por otro, sin tener que llevar a cabo la división correspondiente. Por ejemplo, podemos decir inmediatamente que el número 1 291 896 es divisible por 2 sin conocer el resultado de la división, porque la regla de divisibilidad por 2 establece que todo número es divisible por 2 si y solo si su último dígito (6, en este caso) es par.

Las reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 10 son muy conocidas y generalmente se mencionan en los cursos regulares de matemáticas a nivel primario y secundario. La regla de disivibilidad por 11 es menos familiar, pero es tan sencilla y eficiente que en esta nota la incluiremos junto con las reglas más famosas. Los cursos regulares no suelen justificar la validez de estas reglas (excepto, tal vez, en el caso de las reglas de divisibilidad por 2 y por 10). Sin embargo, el estudio de estas reglas ofrece una buena oportunidad para introducir al estudiante interesado al concepto de demostración rigurosa en matemáticas, así como a los fundamentos de la teoría de números (como se denomina al estudio de las propiedades de los números enteros).

En esta nota comenzaremos recordando las reglas de divisibilidad más familiares, para luego demostrar su validez. Esta discusión nos preparará para discutir la lógica que sustenta a las reglas de divisibilidad en general, así como para hacer algunos comentarios sobre la eficiencia computacional de distintas reglas de este tipo. De ahí pasaremos a formular y demostrar dos reglas que probablemente serán novedosas para la mayor parte de los alumnos y profesores de matemáticas a nivel secundario: las de divisibilidad por 7 y por 13. Estas reglas ilustrarán un mecanismo general que nos permitirá construir una regla de divisibilidad por cualquier número mayor que 10 que no sea múltiplo de 2 ni de 5.

El grado de conocimiento necesario para seguir esta discusión no va más allá del que debiera tener un estudiante costarricense que haya completado exitosamente su bachillerato en enseñaza media. La excepción a esta regla es que algunas de las notas al pie de la página sí requieren conocimiento adicional, como por ejemplo familiaridad con el método de inducción matemática como herramienta de demostración. El lector que así lo desee puede obviar estas notas.

Los argumentos y la presentación que aquí se ofrecen son obra del autor. No conocemos ninguna referencia que cubra el tema específico de las reglas de divisibilidad de la manera que lo hace esta nota. Una búsqueda en Internet, sin embargo, ofrece una variedad de páginas con información sobre las reglas de divisibilidad. Una de las más completas e interesantes (la cual hemos consultado durante la redacción de esta nota) es [3] (en inglés).

Las reglas "de siempre''

> Yo recuerdo que los números cuyos dígitos suman nueve son divisibles por nueve. (A veces dedicaba tardes a verificarlo.)
>
> -Georges Perec, *Je me souviens*, No. 285 [4]

Divisibilidad por 10, 2 y 5

Las reglas de divisibilidad por un entero n que aquí discutimos parten todas de la representación decimal del número N cuya divisibilidad por n deseamos investigar. En otras palabras, todas estas reglas se basan en manipulaciones de los dígitos del dividendo N, expresado decimalmente. La regla más sencilla y trasparente es, lógicamente, la de divisibilidad por 10. Un número es divisible por 10 si y solo si su último digito es 0. La demostración es trivial, pero la formularemos rigurosamente porque ilustra el tipo de razonamiento que utilizaremos más adelante para obtener reglas de divisibilidad más complejas.

En nuestra discusión utilizaremos repetidamente los siguientes resultados sencillos: Si n y m son dos enteros, ambos divisibles por otro entero k, entonces $n+m$ es divisible por k. Y si n es divisible por k, pero m no lo es, entonces $n+m$ no es divisible por k. Ambos resultados son muy fáciles de demostrar (lo cual dejamos como ejercicio para el lector interesado) y pueden resumirse así: Supongamos que $l=n+m$ y que n es un entero divisible por k. En ese caso l es divisible por k si y solo si m también es divisible por k.

De ahora en adelante utilizaremos la notación $\overline{\ldots dcba}$ para denotar el número con la expresión decimal dada por el dígito a en el lugar de las unidades, el dígito b en el lugar de las decenas, etc. Por lo tanto, el valor de $N=\overline{\ldots dcba}$ puede expresarse de la siguiente manera: N = a + 10b + 100c + 1000d + ...

Demos a la cantidad $N - a = 10b + 100c + 1000d + \dots$ el nombre D. Evidentemente, D siempre será divisible por 10, sin importar los valores de $b, c, d, \dots$ Como $N = D + a$, concluimos que N es divisible por 10 si y solo si a es divisible por 10. El número a debe estar entre 0 y 9 inclusive, y de esos valores únicamente 0 es divisible por 10, (recordemos que 0 es divisible por cualquier número entero $n \neq 0$, puesto que $0/n = 0$). Por lo tanto, N es divisible por 10 si y solo si $a = 0$.

Esta demostración puede ser modificada inmediatamente para formular y demostrar la regla de divisibilidad para cualquier divisor del número 10, puesto que si n divide a 10, necesariamente divide a D. Por lo tanto N es divisible por 2 (o por 5) si y solo si el último dígito a es divisible por 2 (o por 5). Para el 2, esto implica que a debe ser par. Para el 5, implica que a debe ser 0 o 5.

Divisibilidad por 9 y 3

La regla de divisibilidad por 9 es mucho más sorprendente y seguramente ha intrigado a un sinnúmero de estudiantes de escuela primaria, como intrigó al joven Georges Perec (quien más tarde se convertiría en uno de los escritores franceses más originales del siglo XX).

Un número es divisible por 9 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible por 9. La demostración es la siguiente:

Supongamos que $N = \overline{\dots dcba}$. Entonces

$$\begin{aligned} N &= a + 10b + 100c + 1000d + \dots \\ &= (9b + 99c + 999d + \dots) + (a + b + c + d + \dots) \qquad (2) \end{aligned}$$

Llamaremos D a la cantidad $9b + 99c + 999d + \dots$ en la ecuación (2), de manera que $N = D + a + b + c + d + \dots$ Está claro que D siempre es divisible por 9 [2]. Por lo tanto N es divisible por 9 si y solo si $a + b + c + d + \dots$ (o sea, la suma de sus dígitos) es divisible por 9.

Fácilmente podemos modificar este resultado para formular y demostrar una regla de divisibilidad por el único divisor propio de 9: el número 3. $D = 9b + 99c + 999d + \dots$ es siempre divisible por 3. Por lo tanto un número es divisible por 3 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

A partir de las reglas que hemos cubierto hasta aquí, podemos inmediatamente formular varias otras. Un número es divisible por 6 si y solo si es divisible por 2 y por 3. Un número es divisible por 4 si y solo si sus últimos dos dígitos forman un número (el número $\overline{ba}$) divisible por 4. Dejamos al lector como ejercicio sencillo formular y demostrar una regla de divisibilidad para el 8.

Divisibilidad por 11

La regla de divisibilidad por 11 es la siguiente: N es divisible por 11 si y solo si al sumar los dígitos en posición impar y luego restar los dígitos en posición par, obtenemos un número divisible por 11. Por ejemplo, el número 20 482 es divisible por 11 porque $2 - 0 + 4 - 8 + 2 = 0$, y 0 es divisible por 11. El número 123 456 no es divisible por 11 porque $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3$ no es divisible por 11 [3].

La demostración de esta regla es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
N &= a + 10b + 100c + 1000d + \ldots \\
&= (11b + 99c + 1001d + \ldots) + (a - b + c - d + \ldots) = D + P \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Donde hemos dado el nombre P a la cantidad $a - b + c - d + \ldots$ y el nombre D al resto. La cantidad D siempre es divisible por 11 [4]. Por lo tanto N es divisible por 11 si y solo si P es divisible por 11.

La lógica de las reglas y su eficiencia

El lector acucioso se habrá percatado, por nuestra discusión anterior, que la lógica de las reglas de división es la siguiente: La regla nos indica que formemos cierto número P a partir de una manipulación con los dígitos de N en su expresión decimal $\overline{\ldots dcba}$. Si podemos demostrar que $N = D + P$ y que D siempre es divisible por n, tendremos que N es divisible por n si y solo si P es divisible por n. Y como, para un número N arbitrario, tenemos que D puede corresponder a una suma con cualquier cantidad de términos, la demostración de que D es divisible por n suele depender de que cada uno de los términos en esa suma sea, por sí solo, divisible por n [5].

Si N es tan grande que P es un número cuya divisibilidad no nos resulta obvia, podemos aplicar la regla nuevamente para P, y repetir este proceso tantas veces como necesitemos para acabar con un número tan pequeño que su divisibilidad sea obvia. Por ejemplo, supongamos que queremos saber si $N = 97\ 859\ 943$ es divisible por 9. Al aplicar la regla de divisibilidad tenemos que $P = 54$. Si se no hubiera olvidado que $54 = 9 \times 6$, podemos aplicar la regla una segunda vez, lo cual nos da $5 + 4 = 9$. En dos pasos hemos pasado de un número de 8 dígitos a uno un solo dígito. La regla de divisibilidad por 9 es sumamente eficiente, pues cada aplicación reduce un número N a un número P mucho menor.

La regla de divisibilidad por 10 es aún más eficiente: reduce, en un solo paso, un número $N = \overline{\ldots dcba}$ de cualquier cantidad de dígitos, a un número $P = a$ de un solo dígito. Hoy, en la era en que las computadoras y las calculadores de bolsillo abundan en gran parte del mundo, dividir un entero por otro podría no parecer una tarea muy difícil. Pero esto no debiera cegarnos a la belleza conceptual de la eficiencia con la que las reglas que hemos presentado simplifican el problema de saber si un número es divisible por otro.

Si lo deseamos, podemos cuantificar la eficiencia de las reglas de divisibilidad de la siguiente manera. Si N es un número de r dígitos, en el peor de los casos, ¿cuántos dígitos esperamos que tenga el número P? La regla del diez es tan eficiente como puede ser: N puede tener cualquier número de dígitos y P siempre tendrá un solo dígito. El caso de la regla para el 9 es ligeramente más sutil. El tamaño de P depende de los dígitos específicos de N. Pero un dígito decimal no puede ser mayor que 9. Esto es, P para un número N de r dígitos es siempre igual o menor que $9r$. Aquellos lectores que conozcan la teoría de los logaritmos sabrán que el número de dígitos en la representación decimal de $9r$ está dado por uno más la parte entera de $\log 9r$ y que la parte entera de $\log 9r$ es igual o menor que 1 más la parte entera de $\log r$.

Por lo tanto, en el caso de la regla de divisibilidad por 9, el número de dígitos de P es igual o menor que 2 más el logaritmo del número de dígitos de N. Un estudioso de la teoría de la computación diría que la regla de divisibilidad por 9 tiene una "eficiencia logarítimica."

Otras reglas menos conocidas

Divisibilidad por 7

Un famoso "teorema" reza que, de los enteros entre 0 y 100, todos los que parecen primos son primos, excepto el

91, que parece primo pero es igual a 7×13 [6]. Evidentemente, 91 parece primo porque no tenemos un mecanismo sencillo para determinar cuándo un número es divisible por 7.

Seguramente muchos estudiantes a través de los siglos se habrán preguntado, al estudiar las reglas de divisibilidad básicas en el escuela o en el colegio, por qué no hay una regla de divisibilidad por 7. En realidad no es difícil formular una regla de divisibilidad por 7 o, como veremos, para cualquier otro entero $n > 10$ que no sea múltiplo

Una regla posible de divisibilidad por 7 es la siguiente: $N = \overline{\ldots dcba}$ es divisible por 7 si y solo si $P = \overline{\ldots dcb} - 2a$ es divisible por 7. O sea, tomamos N, eliminamos su último dígito y al número resultante le restamos 2 veces ese último dígito. N es divisible por 7 si y solo ese nuevo número es divisible por 7. Por ejemplo, 91 es divisible por 7 porque $9 - 2 \times 1 = 7$ es divisible por 7. El entero 308 es divisible por 7 porque $30 - 2 \times 8 = 14$ es divisible por 7. La demostración de esta regla es la siguiente:

Tenemos que

$$\begin{aligned} 3P \;=\; 3(\overline{\ldots dcb} - 2a) &= 3(-2a + b + 10c + 100d + \ldots) \\ &= -6a + 3b + 30c + 300d + \ldots \qquad (4) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} N &= 3P + D \\ &= (-6a + 3b + 30c + 300d + \ldots) + 7a + 7b + 70c + 700d + \ldots \qquad (5) \end{aligned}$$

En la ecuación (5) hemos definido $D = 7a + 7b + 70c + 700d + \ldots$, cantidad que evidentemente es siempre divisible por 7. Por lo tanto N es divisible por 7 si y solo si $3P$ es divisible por 7, y $3P$ es divisible por 7 si y solo si P es divisible por 7 [7].

Cada vez que aplicamos este proceso obtenemos un número que tiene solo uno o dos dígitos menos que el número que teníamos anteriormente. Claramente esta regla de divisibilidad es poco eficiente comparada con las reglas que mencionamos en el capítulo anterior.

Divisibilidad por 13

Para el número 13 podemos formular esta regla: $N = \overline{\ldots dcba}$ es divisible por 13 si y solo si $P = \overline{\ldots dcb} - 9a$ es divisible por 13. Por ejemplo, $N = 247$ es divisible por 13 porque $P = 24 - 9 \times 7 = -39$ es divisible por 13. La demostración de la validez de esta regla es la siguiente:

Tenemos que:

$$\begin{aligned} 10P \;=\; 10(\overline{\ldots dcb} - 9a) &= 10(-9a + b + 10c + 100d + \ldots) \\ &= -90a + 10b + 100c + 1000d + \ldots \qquad (6) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} N &= 10P + D \\ &= (-90a + 10b + 100c + 1000d + \ldots) + 91a \end{aligned} \tag{7}$$

En la ecuación (7) hemos definido $D = 91a$, cantidad divisible por 13. N es, entonces, divisible por 13 si y solo si $10P$ es divisible por 13 y, por lo tanto, también si y solo si P es divisible por 13.

Otra posible regla de divisibilidad por 13 que resulta en algunas ocasiones más manejable es la siguiente: $N = \overline{\ldots dcba}$ es divisible por 13 si y solo si $P = \overline{\ldots dcb} + 4a$ es divisible por 13. Por ejemplo, $N = 247$ es divisible por 13 porque $P = 24 + 4 \times 7 = 52$ es divisible por 13 (si no lo sabemos de antemano, podemos aplicar la regla nuevamente: $5 + 4 \times 2 = 13$). La demostración de la validez de esta regla es la siguiente:

Tenemos que:

$$10P = 10(\overline{\ldots dcb} + 4a) = 40a + 10b + 100c + 1000d + \ldots \tag{8}$$

Por lo tanto:

$$N = 10P + D = (40a + 10b + 100c + 1000d + \ldots) - 39a \tag{9}$$

En la ecuación (9) hemos definido $D = -39a$, cantidad divisible por 13. N es, entonces, divisible por 13 si y solo si $10P$ es divisible por 13, y por lo tanto también si y solo si P es divisible por 13.

Divisibilidad por $n > 10$

Resulta evidente que las reglas de división para el 13 que hemos formulado representan el fruto de la desesperación, puesto que en la gran mayoría de los casos el cálculo para obtener P es complicado y debe repetirse varias veces antes de alcanzar un número cuya divisibilidad sea evidente. Usando el lenguaje de la sección anterior, podemos decir que las reglas son no solo complicadas, sino además ineficientes.

Pero estas reglas también sugieren que no es difícil obtener una regla de divisibilidad para cualquier número n superior a 10, que no sea múltiplo de 2 o de 5. El procedimiento es el siguiente:

> **Primero**, debemos encontrar el menor entero positivo s que sea múltiplo de n y cuyo último dígito sea 9 o 1[8].
>
> **Segundo**, debemos calcular $s/10$ y redondear al entero más cercano. Al resultado lo llamaremos q.
>
> **Finalmente**, formulamos esta regla: $N = \overline{\ldots dcba}$ es divisible por n si y solo si $P = \overline{\ldots dcb} \pm q \times a$ es divisible por n. El signo de $q \times a$ en la fórmula para P debe escogerse así: positivo si s tiene 9 por último dígito, o negativo si el último dígito de s es 1.

Sugerimos al lector interesado que se detenga a formular una regla de divisibilidad correspondiente para el 17 y que la utilice en un par de números apropiadamente seleccionados. El lector que haya llegado hasta aquí en esta discusión seguramente podrá luego formular la demostración rigurosa de que el procedimiento descrito siempre produce reglas de divisibilidad válidas (aunque muy poco útiles o eficientes). Quienes tengan interés en completar ese ejercicio pueden luego comparar su razonamiento con la demostración que damos a continuación.

La demostración que ofrecemos acá se aplica al caso en que $s = 10q + 1$. (El caso $s = 10q - 1$ es muy similar y, para simplificar la discusión, no lo presentaremos aquí.)

Tenemos que $N = \overline{\ldots dcba}$. Luego:

$$10P \;=\; 10(\overline{\ldots dcb} - q \times a) \;=\; -10q \times a + 10b + 100c + 1000d + \ldots \quad (10)$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} N &= (-10q \times a + 10b + 100c + 1000d + \ldots) + (10q + 1)a \\ &= 10P + s \times a \qquad (11) \end{aligned}$$

Por hipótesis, s es divisible por n. Como 10 y n no comparten divisores, N es divisible por n si y solo si P es divisible por n.

Conclusión

El propósito principal de esta nota ha sido suscitar el interés de los estudiantes avanzados y profesores de matemática a nivel secundario por los principios de la demostración formal y por la teoría de números (y de paso también por la noción de eficiencia en la teoría de la computación). Las reglas de divisibilidad nos han ofrecido una oportunidad de introducir estos temas. Invitamos todos quienes tengan interés a buscar más información sobre estas cuestiones, ya sea en la biblioteca o a través de la búsqueda en Internet.

Bibliografía

1 Thomas Stearns Eliot. 1967. Choruses from `The Rock': Selected Poems. Orlando, Harvest Books.
2 Diccionario de la lengua española. 2001. Vigésima segunda edición. Madrid, Real Academia Española.
3 Ask Dr. Math FAQ: Divisibility Rules.
⟨http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.divisibility.html⟩.

4 Georges Perec. 1978. Je me souviens. París, Hachette.