Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 8, N^o 1. 2007

Solución Distribucional de la Ecuación de Enskog para un dato cerca al Maxwelliano

María Ofelia Vázquez
mvasqueza@unicartagena.edu.co
Programa de Matemáticas
Universidad de Cartagena

Bernardo Orozco Herrera
borozcoh@unicartagena.edu.co
Programa de Matemáticas
Universidad de Cartagena

Rafael Galeano Andrades
rgaleanoa@unicartagena.edu.co
Programa de Matemáticas
Universidad de Cartagena

Resumen

Se prueba la existencia de una solución distribucional global para un dato inicial suficientemente cercano al Maxwelliano de tipo $\operatorname{Exp}\left(\frac{|x-v-F|^2}{2}\right)$ para la ecuación de Enskog con término fuerza.

Abstract

We prove the existence of a global distributional solution for an initial data close enough to a Maxwellian of the type $\operatorname{Exp}\left(\frac{|x-v-F|^2}{2}\right)$, for the Enskog equation with force term.

Palabras clave: Ecuación de Enskog, término fuerza, solución distribucional, dato inicial cerca del Maxwelliano.

1.1 Introducción.

La ecuación de Enskog es una modificación de la ecuación cinética de Boltzmann, en la cual cualquier partícula es considerada en el modelo de esfera sólida con diámetro $a > 0$ (y por tanto las colisiones toman lugar en un punto a una distancia $\frac{a}{2}$ de los centros de las esferas colindantes). La ecuación de Enskog nos da una buena descripción del fenómeno de transporte de gases moderadamente densos. La ecuación de Enskog con término fuerza se puede expresar en la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f + t\dfrac{\partial F}{\partial t} \cdot \nabla_v f = E(f) \\ f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $(x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y $E(f)$ es el operador de colisión de Enskog dado por $E(f) = E^+(f) - E^-(f)$ con

$$E^+(f) = \int_{\mathbb{R}^3 \times S_+^2} Y(f)B(\eta, w-v) f(t,x,v') f(t,x+a\eta,w')dwd\eta$$
$$E^-(f) = \int_{\mathbb{R}^3 \times S_+^2} Y(f)B(\eta, w-v) f(t,x,v) f(t,x-a\eta,w)dwd\eta$$

donde $S_+^2 = \{\eta \in \mathbb{R}^3 : |\eta| = 1, B(\eta, w-v) \geq 0\}$ y

$$\left.\begin{aligned} v' &= v + \eta B(\eta, w-v) \\ w' &= w - \eta B(\eta, w-v) \end{aligned}\right\}$$

Sea

$$V = \{\varphi \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) : 0 \leq \varphi(t,x,v) \leq \hat{f}(t,x,v)\}$$

con

$$\hat{f}(t,x,v) = \mathrm{Exp}\left\{-\frac{|x-(1+t)v-(1+t)F|^2}{2}\right\}c(t)$$

y $c(t)$ a determinar. El espacio V es de Banach con la norma definida por

$$||\varphi||_V = ess \sup_{s\in[0,t],x\in\mathbb{R}^3,v\in\mathbb{R}^3} \left|\frac{\varphi(s,x,v)}{\hat{f}(s,x,v)}\right|$$

para la demostración de este hecho ver [7, pag.1022].

El funcional Y, está definido sobre V y le imponemos las siguientes hipótesis:

1. Existe una constante $M > 0$ tal que $|Y(f)| \leq M$.
2. $0 \leq f_1 \leq f_2 \Rightarrow Y(f_1) \leq Y(f_2)$.
3. $|Y(f) - Y(g)| \leq K||f-g||_V$.
4. $B(\eta, w-v) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times S^2_+)$, aquí B es un operador acotado y continuo.

El campo externo F,

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t,x,v) &\longmapsto F(t,x,v) = \frac{1}{1+t}x - v \end{aligned}$$

satisface las siguientes propiedades:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{1}{1+t}, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial F_i}{\partial v_j} = \begin{cases} -1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

Existencia, unicidad y decrecimiento en el tiempo de las soluciones globales distribucionales en ausencia de término fuerza, han sido estudiados por muchos autores, esta teoría fue iniciada por Illner y Shimbrot(1984)(ver [5]). Se han obtenido también resultados de esta teoría, con hipótesis más generales, por Toscani(1986) (ver [2]). Se han estudiado las funciones φ con maxweliano decreciente y en los trabajos realizados últimamente se le ha considerado con decrecimiento polinómico; estas funciones tienen dato inicial con masa infinita(ver [2]). Otros resultados de existencia han sido obtenidos para dato inicial cerca al maxweliano local, estas teorías descansan sobre efectos dispersivos en todo el espacio.

Consideremos primero la ecuación espacialmente homogénea para partículas neutrales en un campo fuerza $F = F(t,x,v)$, en relación con este tema debemos citar el artículo de Asano[AS1] en el cual se prueba existencia local para condiciones iniciales generales, la formulación de Asano es el punto de partida de todos los estudios desarrollados después de este artículo.

Algunos estudios del problema se pueden encontrar en los artículos [AS3], [GU1], [HA2] y [BL4]. En particular, en los artículos de Asano [AS3] y Grunfeld [GU1] se prueba existencia global para la solución con condición inicial cerca al equilibrio con un campo de fuerza conservativo. Hamdache[HA2] nos da un resultado con dato inicial decayendo exponencialmente a cero en el infinito en el espacio fase y trayectorias pre-escritas por un campo oscilante. En [BL4] se da un resultado de existencia global para dato decayendo y para un campo de fuerza actuando en un intervalo de tiempo $[0,T]$ con T grande, pero finito. Recientemente en [LN3] se extendió el problema de Cauchy para dato grande en L^1 en presencia de un campo externo. El aspecto importante del resultado en [LN3] es que se refiere a campos de fuerza dependientes de la función de distribución, este caso es enteramente diferente de los casos pre-escritos anteriormente.

Usando las mismas ideas tratadas en [5], particularmente si

$$\left\{-\frac{|x-(1+t)v-(1+t)F|^2}{2}\right\}$$

resuelve la ecuación de transporte, demostraremos existencia de soluciones renormalizadas para la ecuación de Enskog con término fuerza. En este sentido es nuestro aporte a esta teoría.

El artículo lo dividimos en tres secciones; en la primera se da la definición de solución renormalizada, en la segunda parte se demostrará un lema necesario para aplicar el esquema iterativo de Kaniel y Shinbrot y en la tercera y última parte estará la demostración del teorema principal.

1.2 Solución Renormalizada

Una función $f = f(t,x,v) \geq 0 \in L^1_+ \left(\mathbb{R}^+_{loc} \times \mathbb{R}^3 \ \times \mathbb{R}^3\right)$ es llamada una solución renormalizada de la ecuación de Enskog (1) si

$$\frac{E(f)}{1+f} \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right) \tag{1.2}$$

y si para cualquier función continua Lipchitz $\beta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface $|\beta^{'}(t)| \leq \dfrac{c}{1+t}$ para todo $t \geq 0$ tenemos

$$T\beta(f) = \beta^{'}(f)E(f), \tag{1.3}$$

en el sentido de las distribuciones, aquí

$$T = \partial_t + v \cdot \nabla_x + F \cdot \nabla_v + t\frac{\partial F}{\partial t}\nabla_v$$

Lema 1.1 Sea $f \in (L^1_{loc} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$

1. Si f satisface (2) y (3) con $\beta(t) = \ln(1+t)$, entonces se dice que f es solución regular (mild) de la ecuación de Enskog.

2. Si f es una solución regular (mild) de la ecuación de Enskog y si $\dfrac{E(f)}{1+f} \in L^1_{loc}\big(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\big)$, entonces f es solución renormalizada.

Demostración. Ver [4, pag. 144]

Lema 1.2 Sea $g_0(t,x,v) = c(t)\xi(t,x,v)$ y $G_0(t,x,v) = d(t)\xi(t,x,v)$ donde

$$\xi(t,x,v) = \mathrm{Exp}\Big\{-\frac{|x-(1+t)v-(1+t)F|^2}{2}\Big\}$$

que satisfacen (2) y (3) con $0 \le c(t) \le d(t)$ a determinar,entonces g_0 y G_0 existen y además $g_0(t) \le G_0(t)$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\log(1+g_0) + v\cdot\nabla_x \log(1+g_0) + F\cdot\nabla_v \log(1+g_0) + t\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v \log(1+g_0) = \dfrac{E(g_0)}{1+g_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\log(1+G_0) + v\cdot\nabla_x \log(1+G_0) + F\cdot\nabla_v \log(1+G_0) + t\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v \log(1+G_0) = \dfrac{E(G_0)}{1+G_0} \\ g_0(t=0,.,.) = (1-\varepsilon)c_0\mathrm{Exp}\Big[-\dfrac{|x-v-F|^2}{2}\Big] \\ G_0(t=0,.,.) = (1+\varepsilon)c_0\mathrm{Exp}\Big[-\dfrac{|x-v-F|^2}{2}\Big] \end{cases}$$

esto es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\log(1+g_0) = & \frac{\dot{c}(t)\xi(t,x,v) + c(t)\mathrm{Exp}[-\frac{1}{2}|x-(1+t)v-(1+t)F|^2]}{1+g_0} \\ & \Big[-(x_1-(1+t)v_1-(1+t)F_1)(-v_1-F_1-t\frac{\partial F_1}{\partial t}) \\ & -(x_2-(1+t)v_2-(1+t)F_2)(-v_2-F_2-t\frac{\partial F_2}{\partial t}) \\ & -(x_3-(1+t)v_3-(1+t)F_3)(-v_3-F_3-t\frac{\partial F_3}{\partial t})\Big]\frac{1}{1+g_0} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v\cdot\nabla_x \log(1+g_0) = & \frac{c(t)}{1+g_0}\mathrm{Exp}\left\{-\frac{|x-(1+t)v-(1+t)F|^2}{2}\right\}\\
& \left[v_1(x_1-(1+t)v_1-(1+t)F_1)\left(1-\frac{\partial F_1}{\partial t}-t\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)\right.\\
& +v_2(x_2-(1+t)v_2-(1+t)F_2)\left(1-\frac{\partial F_2}{\partial t}-t\frac{\partial F_2}{\partial t}\right)\\
& \left.+v_3(x_3-(1+t)v_3-(1+t)F_3)\left(1-\frac{\partial F_3}{\partial t}-t\frac{\partial F_3}{\partial t}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
F\cdot\nabla_v \log(1+g_0) = F_1\frac{\partial}{\partial v_1}\log(1+g_0)+F_2\frac{\partial}{\partial v_2}\log(1+g_0)+F_3\frac{\partial}{\partial v_3}\log(1+g_0)
$$

con

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v_i}\log(1+g_0) = & \frac{c(t)}{1+g_0}\mathrm{Exp}\left\{-\frac{|x-(1+t)v-(1+t)F|^2}{2}\right\}\\
& (x_i-(1+t)v_i-(1+t)F_i)\left(1-t-\frac{\partial F_i}{\partial v_i}-t\frac{\partial F_i}{\partial v_i}\right)\\
i = 1,2,3 &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& t\frac{\partial F}{\partial t}\nabla_x \log(1+g_0) =\\
& t\left[\frac{\partial F_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v_1}\log(1+g_0)+\frac{\partial F_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v_2}\log(1+g_0)+\frac{\partial F_3}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v_3}\log(1+g_0)\right]
\end{aligned}
$$

ahora

$$
\begin{aligned}
& E(g_0)(t,x,v) =\\
& a^2c^2(t)\int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} Y(g_0)B(\eta,w-v)\xi(t,x,v)\xi(t,x+a\eta,w)\,dw\,d\eta-\\
& a^2c^2\xi(t,x,v)\int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} Y(g_0)B(\eta,w-v)\xi(t,x-a\eta,w)
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
&E(g_0)(t,x,v) \leq \\
&a^2c^2(t)\int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} Y(g_0)B(\eta,w-v)dwd\eta - \\
&a^2c^2\xi(t,x,v)\int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} Y(g_0)B(\eta,w-v)\xi(t,x-a\eta,w)dwd\eta \leq \\
&a^2c^2(t)\int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} Y(g_0)B(\eta,w-v)dwd\eta\left[1-\mathrm{Exp}\left\{-\frac{|x-(1+t)v-(1+t)F|^2}{2} - \right.\right. \\
&\left.\left.\frac{|x-a\eta-(1+t)w-(1+t)F|^2}{2}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

Ahora como $B(\eta,w-v)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3\times S^2_+)$ y $\mathrm{Exp}\left\{-\frac{|x-a\eta-(1+t)w-(1+t)F|^2}{2}\right\}\in L^\infty(\mathbb{R}^3\times S^2_+)$ entonces aplicando la desigualdad de Hölder tenemos que existe $L>0$ tal que

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} B(\eta,w-v)\mathrm{Exp}\left\{-\frac{|x-a\eta-(1+t)w-(1+t)F|^2}{2}\right\}dwd\eta\right| < L
$$

Es decir tendríamos la siguiente desigualdad

$$
\begin{cases}
\dot{c}(t)\mathrm{Exp}\left\{-\frac{|x-(1+t)v-(1+t)F|^2}{2}\right\} + LMa^2c^2(t) \leq 0 \\
c(0) = (1-\varepsilon)c_0
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

procediendo de manera análoga con G_0 obtenemos el siguiente sistema

$$
\begin{cases}
\dot{c}(t)\mathrm{Exp}\left\{-\frac{|x-(1+t)v-(1+t)F|^2}{2}\right\} + LMa^2c^2(t) \leq 0 \\
\dot{d}(t)\mathrm{Exp}\left\{-\frac{|x-(1+t)v-(1+t)F|^2}{2}\right\} + LMa^2d^2(t) \leq 0 \\
c(0) = (1-\varepsilon)c_0 \qquad d(0) = (1+\varepsilon)d_0
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

lo cual garantiza la existencia de $c(t)$ y $d(t)$ y por lo tanto la existencia de g_0 y G_0.

Lema 1.3 Sean g_0 Y G_0 definidos previamente, entonces existen g_1 y G_1 tales que

$$0 \leq g_0(t) \leq g_1(t) \leq G_1(t) \leq G_0(t)$$

y que satisfacen

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(1+g_1)+v\cdot\nabla_x\log(1+g_1)+F\cdot\nabla_v\log(1+g_1)+t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v\log(1+g_1)=\frac{E(g_0)}{1+g_0}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(1+G_1)+v\cdot\nabla_x\log(1+G_1)+F\cdot\nabla_v\log(1+G_1)+t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v\log(1+G_1)=\frac{E(G_0)}{1+G_0}$$

$$g_1(t=0,.,.)=G_1(t=0,.,.)=f_0$$

tal que

$$(1-\varepsilon)c_0\xi_0(x,v)\leq f_0(x,v)\leq(1+\varepsilon)d_0\xi_0(x,v)$$

Demostración. Como

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}g_1+v\cdot\nabla_x g_1+F\cdot\nabla_v g_1+t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v g_1=\frac{E(g_0)}{1+g_0}\\
&\frac{\partial}{\partial t}G_1+v\cdot\nabla_x G_1+F\cdot\nabla_v G_1+t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v G_1=\frac{E(G_0)}{1+G_0}\\
&g_1(0,.,.)=G_1(0,.,.)=f_0
\end{aligned}$$

definiendo

$$\begin{cases} g_1^{\#}(t,x,v)=g_1(t,x+vt,v+tf)\\ G_1^{\#}(t,x,v)=G_1(t,x+vt,v+tf)\end{cases}$$

Entonces $\dfrac{d}{dt}g_1^{\#} = \dfrac{E(g_0)}{1+g_0}$ luego $g_1^{\#}(t,x,v) = \displaystyle\int_0^T \dfrac{E(g_0)}{1+g_0}\,dt$ con la propiedad $g_1^{\#}(0,x,v) = g_1(0,x,v) = f_0$. Lo mismo sucede con $G_1^{\#}(t,x,v) = \displaystyle\int_0^T \dfrac{E(G_0)}{1+G_0}\,dt$ para $G_1^{\#}(0,x,v) = G_1(0,x,v) = f_0$

Teorema 1.1 Sea f_0 un dato inicial el cual satisface, para algún $\varepsilon,\ Pc_0 > 0$

$$(1-\varepsilon)c_0\xi_0(x,v) \leq f_0(x,v) \leq (1+\varepsilon)c_0\xi_0(x,v)$$

si ε es sufucientemente pequeño y el operador Y y el campo de fuerza externa F satisfacen las hipótesis expresadas anteriormente, y el hecho de que $B(\eta, w-v) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times S^2_+)$, entonces existe una solución $f \in L^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\big)$ de la ecuación de Enskog (1) en el sentido de distribución.

Demostración. Siguiendo el esquema iterativo clásico de Kaniel y Shinbrot, definimos las sucesiones $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(1+g_n) + v\cdot\nabla_x \log(1+g_n) + F\cdot\nabla_v \log(1+g_n) + t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v \log(1+g_n) = \frac{E(g_{n-1})}{1+g_{n-1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(1+G_n) + v\cdot\nabla_x \log(1+G_n) + F\cdot\nabla_v \log(1+G_n) + t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v \log(1+G_n) = \frac{E(G_{n-1})}{1+G_{n-1}}$$

$g_n(0,\cdot,\cdot) = G_n(0,\cdot,\cdot) = f_0$

como en [7] obtenemos por un principio de comparación, que g_n y G_n satisfacen

$$0 \leq g_0(t) \leq g_1(t) \leq \cdots \leq g_n(t) \leq \cdots \leq G_n(t) \leq \cdots \leq G_1(t) \leq G_0(t)$$

por tanto g_n y G_n son sucesiones monótonas que convergen puntualmente a límites denotados por $\overline{g}$ y $\overline{G}$, si pasamos al límite en el sentido distribucional obtenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(1+\overline{g})+v\cdot\nabla_x\log(1+\overline{g})+F\cdot\nabla_v\log(1+\overline{g})+t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v\log(1+\overline{g})=\frac{E(\overline{g})}{1+\overline{g}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(1+\overline{G})+v\cdot\nabla_x\log(1+\overline{G})+F\cdot\nabla_v\log(1+\overline{G})+t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v\log(1+\overline{G})=\frac{E(\overline{G})}{1+G}$$

$$\overline{g}(0,\cdot,\cdot)=\overline{G}(0,\cdot,\cdot)=f_0$$

verifiquemos que $\overline{g}=\overline{G}$, observemos que $\overline{g}\leq\overline{G}$ y demostremos que $\overline{G}\leq\overline{g}$.

En efecto, si definimos

$$\begin{aligned}\overline{g}^{\#}(t,x,v)&=\overline{g}(t,x+vt,v+tf)\\ \overline{G}^{\#}(t,x,v)&=\overline{G}(t,x+vt,v+tf)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\overline{g}^{\#}(t,x,v)&=E(\overline{g})\\ \frac{d}{dt}\overline{G}^{\#}(t,x,v)&=E(\overline{G})\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}[\overline{G}^{\#}(t,x,v)-\overline{g}^{\#}(t,x,v)]=E(\overline{G})-E(\overline{g})$$

de donde

$$|\overline{G}^{\#}(t,x,v)-\overline{g}^{\#}(t,x,v)|\leq\int_0^t[E(\overline{G})-E(\overline{g})]dt$$

Sea V el espacio definido anteriormente con la siguiente norma

$$||\varphi|| = ess \sup_{s\in[0,t],\, x\in\mathbb{R}^3,\, v\in\mathbb{R}^3} \left| \frac{\varphi(s,x,v)}{\xi(s,x,v)} \right|$$

para esto ver [7, pag. 1026].

entonces

$$\frac{|\overline{G}^{\#}(t,x,v) - \overline{g}^{\#}(t,x,v)|}{\xi(s,x,v)} \leq \frac{\int_0^t |E(\overline{G}) - E(\overline{g})|dt}{\xi(s,x,v)}$$

ahora

$$\begin{aligned}
\int_0^t |E(\overline{G}) - E(\overline{g})|ds \leq & \int_0^t \left[a^2 M||\overline{G} - \overline{g}|| \int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} B(\eta, w-v)\xi(s,x,v^{'})\xi(t,x+a\eta,w^{'})|dwd\eta\right] ds \\
& + \int_0^t \left[a^2 K||\overline{G} - \overline{g}|| \int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} B(\eta, w-v)\xi(t,x,v^{'})\xi(t,x+a\eta,w^{'})|dwd\eta\right] ds \\
& + \int_0^t \left[a^2 M||\overline{G} - \overline{g}|| \int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} B(\eta, w-v)\xi(t,x,v^{'})\xi(t,x+a\eta,w^{'})|dwd\eta\right] ds \\
& + \int_0^t \left[a^2 \xi(s,x,v) M||\overline{G} - \overline{g}|| \int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} B(\eta, w-v)\xi(t,x-a\eta,w)dwd\eta\right] ds \\
& + \int_0^t \left[a^2 \xi(s,x,v) M||\overline{g} - \overline{G}|| \int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} B(\eta, w-v)\xi(t,x-a\eta,w)dwd\eta\right] ds \\
& + \int_0^t \left[a^2 \xi(s,x,v) K||\overline{g} - \overline{G}|| \int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} B(\eta, w-v)\xi(t,x-a\eta,w)dwd\eta\right] ds.
\end{aligned}$$

como $B(\eta, w-v) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times S^2_+)$ y $\xi(t, x \pm a\eta, w) \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times S^2_+)$ entonces por desigualdad de Hölder tenemos la existencia de $L, L^{'}$ tal que:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} B(\eta, w-v)\xi(s, x\pm a\eta, w)dwd\eta \right| < L$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3\times S^2_+} B(\eta, w-v)\xi(t,x,v^{'})\xi(s, x\pm a\eta, w^{'})dwd\eta \right| < L^{'}$$

entonces

$$||\bar{G}^{\#} - \bar{g}^{\#}|| \leq \frac{1}{\xi(s,x,v)} \int_0^t \big[(a^2ML^{'} + a^2KL^{'} + a^2ML^{'} + a^2\xi(t,x,v)ML + a^2\xi(t,x,v)ML)||\bar{G} - \bar{g}||\big] dt.$$

y por la desigualdad de Gronwall tenemos que $\bar{G} = \bar{g}$ es una solución distribucional de la ecuación de Enskog (1)

Bibliografía

[1] Asano Kiyoshi. *"On the global solution of the initial-boundary value problems for the Boltzmann equation with external force*,T.T.S.P., (1987),735–761.

[2] Bellomo N, Lachowicz M, Palczwiski y Toscani G.*"On the initial value problem for the Boltzmann equation with force term*, T.T.S.P.,**vol 18**,87–102.

[3] Bellomo N, Lachowicz M, Polewczak j y Toscani G.*"Mathematical Topics in Non-linear Kinetic Theory II.*, World Scientific,(1991).

[4] Cercignani C., Illner R., Pulvirenti M. G.*"The mathematical theory of dilute gases"*, appl. math. Sci. Springer Verlag, Berlin, (1994).

[5] Illner R. y Shinbrot G.*"Global existence for a rare gas in an infinite vacunm Comm. math"*, Phys,**vol 95**,(1984),117–126.

[6] Lachowicz M.*"Sul problema al valore iniziale per l'equazione di Enskog con campo externo"*, Bol.Un.Mat.Ital., (2000).

[7] Mischlers y Perthame B.*"Boltzmann equation with infinite energy: Renormalized solutions and distributional solution for small initial data and initial data close to a maxwellian"*, Siam J. Math. Anal.,**vol 28**,1015–1027, (1997).

[8] Toscani G.*"On the nonlinear Boltzmann equation in unbounded domains"*, Arch. Rational Mech. Anal.,**vol 95**, 37–49, (1986).

[9] Zhang Xianwen.*"The spectrum of the linear Boltzmann operator with an external field"*, T.T.S.P., (2000).