Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 8, Nº 1. 2007

Mínimos Cuadrados en Ecuaciones Integrales

Yohan Diaz Ferrer
yohan12023@hlg.jovenclub.cu
Joven Club de Computación #2

Lelis Raúl Vaillant Pascual
ydiaz@yahoo.es
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Oriente. Santiago de Cuba. Cuba

Resumen

En este trabajo se hace un análisis preliminar del error del método de mínimos cuadrados aplicado en una nueva forma algebraica a determinada ecuación integral.

Abstrac

In this work a preliminary analysis of the error of the method of applied least square is made in a new algebraic form to certain integral equation.

Palabras claves: ecuaciones integrales, ecuación integral de Fredholm interpolación, trazadores cúbicos, mínimos cuadrados.

1.1 Fundamentos del método.

El método de mínimos cuadrados aplicado a las ecuaciones integrales consiste en lo siguiente. Sea dada la ecuación integral de Fredholm de primer tipo

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt = f(s) \tag{1.1}$$

que en forma de operador se escribe

$$\mathbf{A}\varphi(t) = f(s)$$

Tomando $\widetilde{\varphi}(t)$, un valor aproximado de $\varphi(t)$, representado mediante la combinación lineal de una base de funciones

$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ linealmente independientes, o sea,

$$\widetilde{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(t) \tag{1.2}$$

sustituyendo esta expresión aproximada de $\varphi(t)$ en la ecuación (1.1) se obtiene

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b K(s,t)\varphi_j(t)dt \right) a_j \approx f(s)$$

Determinemos los coeficientes a_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ de forma que minimicen la función

$$\phi(a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{n} \int_a^b K(s,t)\varphi_j(t)dt\, a_j - f(s) \right]^2 ds$$

Los valores mínimos satisfacen las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i} = 2\int_a^b \left[\sum_{j=1}^{n} \int_a^b K(s,t)\varphi_j(t)dt\, a_j - f(s) \right] \left[\int_a^b K(s,t)\varphi_i(t)dt \right] ds = 0$$

despejando a_j obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{n}\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\varphi_j(t)dt\right]\left[\int_a^b K(s,t)\varphi_i(t)dt\right]ds a_j =$$
$$= \int_a^b\int_a^b K(s,t)f(s)\varphi_i(t)dtds, \quad i=1,2,\cdots,n$$

Desarrollemos esta técnica para el mismo tipo de ecuación integral pero ahora basándonos en su forma de operador.

Como anteriormente se explicaba la forma de operador de la ecuación integral es

$$\mathbf{A}\varphi = f(s)$$

luego, teniendo en cuenta la aproximación por polinomios de φ se tiene

$$\mathbf{A}\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(t) \approx f(s)$$

Aplicando el método de mínimos cuadrados a esta expresión aproximada de la ecuación integral en forma de operador obtenemos

$$\text{mín}\,\phi(a_1,\cdots,a_n) = \text{mín}\int_a^b\left[\mathbf{A}\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(t) - f(s)\right]^2 ds$$

luego, los mínimos se hallan de las siguientes relaciones

$$\frac{\partial\phi}{\partial a_i} = 2\int_a^b\left[\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}\varphi_j a_j - f(s)\right][\mathbf{A}\varphi_i]\,ds = 0$$

despejando a_j resulta la siguiente expresión

$$\sum_{j=1}^{n}\int_a^b[\mathbf{A}\varphi_j][\mathbf{A}\varphi_i]\,ds a_j = \int_a^b\mathbf{A}\varphi_i f(s)ds, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.3}$$

es decir, hemos obtenido un sistema de ecuaciones lineales de orden $n \times n$ cuyas incógnitas son $a_j \ \ (j = 1, 2, \cdots, n)$. Si en el sistema hacemos

$$a_{ij} = \int_a^b [\mathbf{A}\varphi_j]\,[\mathbf{A}\varphi_i]\,ds, \quad f_i = \int_a^b \mathbf{A}\varphi_i f(s)ds$$

entonces el sistema adquiere la forma $Aa = f$ donde $a = (a_1,\ \cdots,\ a_n)$, $f = (f_1,\ \cdots,\ f_n)$ y $A = (a_{ij})\ (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, n)$.

1.2 Mínimos cuadrados con spline lineal

Consideremos $a = 0$ y $b = 1$ en (1.1), particionemos el intervalo $[0, 1]$ en la forma

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1 \tag{1.4}$$

sea $h_i = t_{i+1} - t_i$ para todo i y definamos las funciones base

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\ \varphi_n(t)$$

mediante la siguiente expresión

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_{i-1} \\ \dfrac{t - t_{i-1}}{h_{i-1}}, & t_{i-1} < t \leq t_i \\ \dfrac{t_{i+1} - t}{h_i}, & t_i < t \leq t_{i+1} \\ \quad 0, & t_{i+1} < t \leq 1 \end{cases}$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$.

Dadas las consideraciones anteriores búsquemos la expresión del sistema de ecuaciones (1.3) y su solución para el siguiente caso particular de ecuación integral

$$\int_0^1 (s^2 + t)\varphi(t)dt = s^2$$

donde s^2+t es el núcleo K y s^2 es el término independiente f.

Primeramente determinemos los coeficientes y términos independientes del sistema (1.3) para este ejemplo, o sea, calculemos a_{ij} y f_i.

La expresión de a_{ij} en forma de operador es

$$a_{ij} = \int_a^b [\mathbf{A}\varphi_j]\,[\mathbf{A}\varphi_i]\,ds$$

o equivalentemente

$$a_{ij} = \int_a^b \left[\int_a^b K(s,t)\varphi_j(t)dt\right]\left[\int_a^b K(s,t)\varphi_i(t)dt\right] ds \tag{1.5}$$

A continuación se sustituyen las expresiones de $K(s,t)$, $f(s)$ y $\varphi_i(s)$ dadas y se hallan los valores de las integrales interiores que aparecen en esta última ecuación

$$\int_a^b K(s,t)\varphi_i(t)dt = \int_0^1 (s^2+t)\varphi_i(t)dt =$$

$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s^2+t)\left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1}}\right)dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s^2+t)\left(\frac{t_{i+1}-t}{h_i}\right)dt$$

Desarrollando el producto subintegral en ambos sumandos, aplicando las propiedades de suma de integrales y operando en cada paso de acuerdo a las relaciones que se establecen entre los términos se llega al siguiente resultado

$$\int_a^b K(s,t)\varphi_i(t)dt = \frac{h_i+h_{i-1}}{2}\left[s^2+\frac{t_{i-1}+t_i+t_{i+1}}{3}\right] \tag{1.6}$$

teniendo en cuenta el caso particular seleccionado y sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (1.5) se obtiene

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 (s^2+t)\varphi_i(t)dt\right]\left[\int_0^1 (s^2+t)\varphi_j(t)dt\right] ds =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{h_i+h_{i-1}}{2}\left(s^2+\frac{t_{i-1}+t_i+t_{i+1}}{3}\right)\right]$$

$$\left[\frac{h_j+h_{j-1}}{2}\left(s^2+\frac{t_{j-1}+t_j+t_{j+1}}{3}\right)\right] ds$$

extrayendo fuera de la integral las constantes y multiplicando el producto subintegral se obtiene la siguiente expresión

$$a_{ij} = \frac{(h_i+h_{i-1})(h_j+h_{j-1})}{4}\left[\frac{1}{5}+\frac{t_{j-1}+t_j+t_{j+1}}{9}+\right.$$
$$\left.+\frac{t_{i-1}+t_i+t_{i+1}}{9}+\frac{(t_{i-1}+t_i+t_{i+1})(t_{j-1}+t_j+t_{j+1})}{9}\right] \tag{1.7}$$

que depende de $h_i,\ h_j,\ \ i=1,2,\cdots,n-1;\ \ j=1,2,\cdots,n-1$

Para facilitar los cálculos, definamos

$$\Gamma(h_i,h_j) = \frac{1}{5}+\frac{t_{i-1}+t_i+t_{i+1}}{9}+\frac{t_{j-1}+t_j+t_{j+1}}{9}+$$
$$+\frac{(t_{i-1}+t_i+t_{i+1})(t_{j-1}+t_j+t_{j+1})}{9}$$

luego,

$$a_{ij} = \Gamma(h_i,h_j)\frac{(h_i+h_{i-1})(h_j+h_{j-1})}{4}$$

Si la partición (1.4) es definida con nudos igualmente espaciados, o sea,

$$h_i = t_{i+1} - t_i = h, \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

entonces

$$a_{ij} = h^2 \left[\frac{1}{5} + \frac{t_i + t_j}{3} + t_i t_j \right] \tag{1.8}$$

luego, si desarrollamos esta expresión teniendo en cuenta que $t_k = kh$, para todo $k = 1, \cdots, n$, resulta que a_{ij} es un polinomio en h de grado 4.

Sólo resta calcular los f_i. La expresión de los f_i en forma de operador es

$$f_i = \int_a^b \mathbf{A}\varphi_i f(s) ds$$

o equivalentemente

$$f_i = \int_a^b \int_a^b K(s,t) f(s) \varphi_i(t) dt ds, \;\; i = 1, 2, \cdots, n$$

Separando estas integrales se obtiene

$$f_i = \int_a^b f(s) \left(\int_a^b K(s,t) \varphi_i(t) dt \right) ds, \;\; i = 1, 2, \cdots, n$$

A continuación se sustituyen el resultado (1.6) y las expresiones de $K(s,t)$, $f(s)$ y $\varphi_i(s)$ dadas al inicio de esta sección en la ecuación anterior resultando

$$f_i = \frac{(h_i + h_{i-1})}{2} \left[\frac{1}{5} + \frac{t_{i-1} + t_i + t_{i+1}}{9} \right] \tag{1.9}$$

.

Si la partición (1.4) es definida con nudos igualmente espaciados, o sea,

$$h_i = t_{i+1} - t_i = h, \quad \text{para todo} \quad i = 1,2,\cdots,n-1$$

obtenemos que

$$f_i = h\left(\frac{1}{5} + \frac{t_i}{3}\right)$$

Para facilitar los cálculos definamos en (1.9)

$$\Upsilon(h_i) = \frac{1}{5} + \frac{t_{i-1} + t_i + t_{i+1}}{9}$$

luego,

$$f_i = \Upsilon(h_i)\frac{(h_i + h_{i-1})}{2}$$

Ahora podemos escribir el sistema (1.3) para la ecuación integral dada, o sea,

$$\sum_{j=1}^{n} \Gamma(h_i,h_j)\frac{(h_i + h_{i-1})(h_j + h_{j-1})}{4} a_j = \Upsilon(h_i)\frac{(h_i + h_{i-1})}{2} \tag{1.10}$$

donde $i = 1,2,\cdots,n$ y $j = 1,2,\cdots,n$.

Tomando una partición con nudos igualmente espaciados (longitud de los subintervalos igual h) se elaboró un programa en el lenguaje de programación C++ que procesa el cálculo de los coeficientes del sistema (1.10) para el ejemplo tratado y la solución de dicho sistema por el método de Gauss. Los resultados del procesamiento de los datos por el programa se listan a continuación.

El sistema que resulta de aplicar mínimos cuadrados es:

$$\begin{aligned}
0.0268229a_1 + 0.0359375a_2 + 0.0450521a_3 + 0.0541667a_4 &= 0.0177083 \\
0.0359375a_1 + 0.0489583a_2 + 0.0619792a_3 + 0.075a_4 &= 0.0229167 \\
0.0450521a_1 + 0.0619792a_2 + 0.0789063a_3 + 0.0958333a_4 &= 0.028125 \\
0.0541667a_1 + 0.075a_2 + 0.0958333a_3 + 0.0116667a_4 &= 0.0246528,
\end{aligned}$$

cuya solución, por el método de Gauss, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0.21131, \\
a_2 &= 0.0078745, \\
a_3 &= 0.0065804, \\
a_4 &= 0.00567115
\end{aligned}$$

Si sustituimos los valores de a_j $(j = 1,2,3,4)$ y la expresión del spline lineal φ_j $(j = 1,2,3)$ en la ecuación (1.2) obtendremos la solución aproximada del ejemplo planteado.

1.3 Análisis del error

Ahora analizaremos el error mediante la siguiente expresión

$$E(s) = \varphi(s) - \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(s) = \varphi(s) - \widetilde{\varphi}(s)$$

donde $E(s)$ es el error del método.

Según [5]

$$\varphi(s)-\widetilde{\varphi}(s)=\frac{det\ B(s)}{det\ A}=E(s)$$

donde

$$det\ B(s)=\begin{vmatrix} f & \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ f_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y

$$det\ A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aplicando módulo a ambos miembros obtenemos

$$|\varphi(s)-\widetilde{\varphi}(s)|=|E(s)|$$

Por la desigualdad de Hadamard para cualquier matriz

$$C=(c_{ij})_{n\times n}$$

se cumple que

$$|det\ C|\leq\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}c_{1j}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}c_{2j}^2\right)\cdots\left(\sum_{j=1}^{n}c_{nj}^2\right)}$$

En este caso nuestra matriz es

$$B = (b_{ij})_{n+1 \times n+1}$$

entonces se cumple para B la desigualdad de Hadamard, o sea, se cumple que

$$|det\ B| \leq \sqrt{\left(f^2 + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^2(s)\right)\left(f_1^2 + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2\right)\cdots\left(f_n^2 + \sum_{j=1}^{n} a_{nl}^2\right)} \tag{1.11}$$

Además tomemos $\varphi(t)$ y $f(s)$ de forma que estén acotados, esto es, $\varphi(t) \leq 1$ y $f(s) \leq M$.

La expresión del error es

$$E(s) = \frac{det\ B(s)}{det\ A} \tag{1.12}$$

Calculemos el $det\ B$. Procedamos primero a determinar la expresión de cada factor subradical en (1.11).

El primer factor debido a las condiciones iniciales impuestas a f y φ esta acotado por

$$f^2 + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^2(s) \leq M^2 + n \tag{1.13}$$

Sustituyendo los valores de a_{ij} y f_i en el i-ésimo factor subradical se obtiene

$$f_i^2 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \frac{(h_i + h_{i-1})^2}{4}\left\{\frac{1}{25} + \frac{2(t_{i-1} + t_i + t_{i+1})}{45} + \right.$$

$$+\frac{(t_{i-1}+t_i+t_{i+1})^2}{81}+\frac{(h_j+h_{j-1})^2}{4}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{5}+\frac{t_{j-1}+t_j+t_{j+1}}{9}+\right.$$

$$\left.+\frac{(t_{i-1}+t_i+t_{i+1})}{9}+\frac{(t_{i-1}+t_i+t_{i+1})(t_{j-1}+t_j+t_{j+1})}{9}\right]^2\Bigg\}$$

Para facilitar los cálculos definamos

$$\Omega(h_i,h_j)=\frac{1}{25}+\frac{2(t_{i-1}+t_i+t_{i+1})}{45}+\frac{(t_{i-1}+t_i+t_{i+1})^2}{81}+$$

$$+\frac{(h_j+h_{j-1})^2}{4}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{5}+\frac{t_{j-1}+t_j+t_{j+1}}{9}+\frac{(t_{i-1}+t_i+t_{i+1})}{9}+\right.$$

$$\left.\frac{(t_{i-1}+t_i+t_{i+1})(t_{j-1}+t_j+t_{j+1})}{9}\right]^2\Bigg\}$$

para una partición con nudos igualmente espaciados (longitud de los subintervalos igual a h), teniendo en cuenta que $t_k=kh,\ k+1,\cdots,n$, esta expresión resulta un polinomio en h de grado 6. Finalmente obtenemos

$$f_i^2+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=\Omega(h_i,h_j)\frac{(h_i+h_{i-1})^2}{4}$$

Un caso particular de este resultado se tiene para una partición con nudos igualmente espaciados (longitud de los subintervalos igual a h)

$$f_i^2+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2=\frac{h^2}{4}\left\{\frac{1}{25}+\frac{2i}{15}h+\frac{i^2}{9}h^2+h^2\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{5}+\frac{(i+j)}{3}h+ijh^2\right]^2\right\} \tag{1.14}$$

donde el miembro derecho es un polinomio en h de grado 8.

Sustituyendo (1.13) y (1.14) en (1.11) se obtiene

$$|det\ B| \leq \sqrt{\left(f^2+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^2(s)\right)\left(f_1^2+\sum_{j=1}^{n}a_{1l}^2\right)\cdots\left(f_n^2+\sum_{j=1}^{n}a_{nl}^2\right)}$$

$$=\sqrt{\left(f^2+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^2(s)\right)\prod_{i=1}^{n}\left(f_i^2+\sum_{j=1}^{n}a_{il}^2\right)}$$

$$\leq \sqrt{(n+1)M^2\prod_{i=1}^{n}\Omega(h_i,h_j)\frac{(h_i+h_{i-1})^2}{4}} \tag{1.15}$$

Calculemos el $det\ A$ para una partición con nudos igualmente espaciados (longitud de los subintervalos igual a h). Efectuando el desarrollo en menores obtenemos la suma de $n!$ combinaciones de sus elementos,

$$\begin{aligned} det\ A &= a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}+a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}+ \\ &\quad +a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}+\cdots+a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn} \end{aligned}$$

Cualesquiera de las combinaciones cumple que es distinta de cero pues teniendo en cuenta que $t_k = kh$, $k = 1, \cdots, n$ y sustituyendo i, j arbitrarios en (1.8) resulta $a_{ij} \neq 0$, $\forall h \neq 0$.

Tomando una de estas combinaciones, por ejemplo

$$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn},$$

y teniendo en cuenta que a_{ij} en (1.8) es un polinomio en h a lo sumo de grado 4, cuya expresión general es (1.7), resulta un polinomio en h de grado $4n$ cuando más, o sea

$$\begin{aligned}
a_{11} &= h^4 + \tfrac{2}{3}h^3 + \tfrac{1}{5}h^2,\\
a_{22} &= 4h^4 + \tfrac{4}{3}h^3 + \tfrac{1}{5}h^2,\\
a_{33} &= 9h^4 + 2h^3 + \tfrac{1}{5}h^2,\\
&\vdots\\
a_{n-1,n-1} &= (n-1)^2h^4 + \tfrac{2n-2}{3}h^3 + \tfrac{1}{5}h^2,\\
a_{nn} &= n^2h^4 + \tfrac{2n}{3}h^3 + \tfrac{1}{5}h^2
\end{aligned}$$

y

$$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} = \left[h^4 + \frac{2}{3}h^3 + \frac{1}{5}h^2\right]\left[4h^4 + \frac{4}{3}h^3 + \frac{1}{5}h^2\right]\left[9h^4 + 2h^3 + \frac{1}{5}h^2\right]$$

$$\cdots\left[(n-1)^2h^4 + \tfrac{2n-2}{3}h^3 + \tfrac{1}{5}h^2\right]\left[n^2h^4 + \tfrac{2n}{3}h^3 + \tfrac{1}{5}h^2\right]$$

pasando al límite cuando h tiende a cero resulta

$$\lim_{h\to 0}\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$$

luego en el denominador de (1.12) obtenemos un polinomio en h de grado $4n$ a lo sumo, producto de los n polinomios de la combinación, lo denotaremos $\mathbf{P}_A$, de esta forma

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{P}_A = 0$$

Desarrollando la expresión bajo el radical de la ecuación (1.15) y aplicando la propiedad de paso al límite al polinomio de grado 8 resultante obtenemos

$$\lim_{h\to 0} \left\{ \frac{h^2}{4} \left[\frac{1}{25} + \frac{2i}{15}h + \frac{i^2}{9}h^2 + h^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{5} + \frac{(i+j)}{3}h + ijh^2 \right)^2 \right] \right\} = 0$$

El producto de los n polinomios bajo el radical genera un polinomio de grado $8n$, lo denotaremos $\mathbf{P}_B$ para el cual

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{P}_B = 0$$

teniendo en cuenta el radical se tiene que

$$Grado\left(\sqrt{\mathbf{P}_B}\right) < Grado\left(\mathbf{P}_A\right)$$

La espresión en el numerador de (1.12) es un infinitesimal de orden superior al denominador y por tanto el error $E(s)$ tiende a 0 cuando h tiende a 0. Entonces la solución aproximada del tipo de ecuación integral tratado representa con un orden determinado de convergencia la solución exacta.

Bibliografía

[1] N. P. Korneichuk, *Splines en Teoría de Aproximación.* Edit. Ciencias, Moscú, 1984.

[2] K. E. Atkinson. "The Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind". SIAM J, Anal, Vol. 14, pp. 337-348, MR 36 #7358, 1967.

[3] N.I. Danílina, N.S. Dubróvskaya, O.P. Kvaská, G.L. Smirnov (1990), *Matemática de Cálculo*. Editorial Mir, Moscú.

[4] C.R. DEBoor. "On Uniform Approximation by Splines". J. Approximation Theory. Vol. 1, pp. 219-235, 1968.

[5] Lelis Vaillant P., Mirta Fabá G. "Error en la Interpolación". Revista Integración, Universidad Industrial de Santander, Colombia, Vol. 16, No. 1, pp. 17-24, 1998.

[6] James L. Phillips. "Error Analysis for Direct Linear Integral Equation Methods". Mathematics of Computation, Vol. 27, No. 124, October, pp. 849-860, 1973.

[7] Arun N. Netravali. "Spline Approximation in the Solution of the Volterra Integral Equation of the Second Kind". Mathematics of Computation, Vol. 27, No. 121, January, pp. 99-106, 1973.

[8] James L. Phillips. "The Use of Collocation as a Projection Method for Solving Linear Operator Equations". SIAM J, Numer. Anal. Vol. 9, pp. 14-28, 1972.

[9] M. Krasnov, A. Kiseliov, G. Makarenko. *Ecuaciones Integrales*, Editorial Mir, Moscú, 1977.

[10] Ben Noble *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1977.

[11] Yohan Diaz F. *Métodos Numéricos para Ecuaciones Integrales*. Tesis de Grado, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Febrero, 2002.

[12] N.I. Danílina, N.S. Dubróvskaya, O.P. Kvaská, G.L. Smirnov, *Matemática de Cálculo*. Editorial Mir. Moscú,1990.