Sección Tecnologías de Internet
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 8, N^o 2. 2007

Semicontinuidad Inferior por Redes

Arturo Sanjuán
aasanjuanc@udistrital.edu.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá Colombia

Resumen.

Se presenta una construcción de la noción de semicontinuidad inferior a través de las redes. Dicha construcción es diferente a las usualmente presentadas, pues no usa imágenes inversas de conjuntos o filtros. Adicionalmente, se demuestra la equivalencia de una definición usual con la definición propuesta y se presenta un ejemplo de funcionales semicontinuos en donde sea útil la definición propuesta.

Palabras clave: topología, redes, funcionales, continuidad, semicontinuidad, espacios 1-contables, espacios Hausdorff, límite inferior.

1.1 Introducción

Es ampliamente conocido, incluso por algunos cursos de cálculo, que una manera de garantizar la existencia de puntos óptimos de funcionales, es cuando se trata de una función a valor real continua definida en un compacto (Spivak, 1996, p. 152). Ahora bien, la continuidad puede llegar a ser un requerimiento muy fuerte, y una manera, por lo menos usada en el cálculo de variaciones, es la de generalizar la continuidad a través del concepto de la semicontinuidad (Castro, 1981, p. 20).

Usualmente en los libros de texto se presenta la semicontinuidad haciendo uso de imágenes inversas de colas abiertas, como en Figueiredo y Castro (1981) o haciendo uso de los filtros como en Megginson (1998). En este documento se propone una definición de semicontinuidad haciendo uso de las redes, se verifica que dicha definición tenga sentido y que sea de utilidad en un ejemplo.

1.2 Redes

Un espacio topológico se dice *1-contable* o que cumple el *primer axioma de numerabilidad* si cada punto del espacio posee una base local enumerable. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ es 1-contable ya que si $x \in \mathbb{R}^n$, la familia

$$\mathcal{B}_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es una base local enumerable para x (Axler & Ribet, 2005 p. 65).

Las sucesiones son una herramienta de gran importancia en espacios topológicos que cumplen el primer axioma de numerabilidad, pues con ellas se pueden definir nociones como continuidad, compacidad y separación (Hu, 1954). No obstante, en espacios topológicos que no son 1-contables, es necesario emplear un concepto más general que las sucesiones y la convergencia usual. El concepto de red (Hu, 1954, p. 76).

Se define entonces, la noción mas general de convergencia. Una relación binaria $\leq$, definida en un conjunto A, *dirige* a A, si se cumplen las siguientes condiciones

El conjunto A es así, un conjunto *dirigido* por $\leq$ o simplemente conjunto *dirigido*.

Sea X un espacio topológico y A un conjunto dirigido. Una *red* en X es una función

$$\begin{aligned} x : A &\longrightarrow X \\ \alpha &\longmapsto x_\alpha \end{aligned}$$

Sea $Y \subseteq X$, x_α *está finalmente para* α en Y si existe un α_0 tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$, $x_\alpha \in Y$. Así mismo, x_α *esta frecuentemente para* α en Y, si para todo $\alpha \in A$, existe $\beta \in A$ tal que $\beta \geq \alpha$ y $x_\beta \in A$. Estos dos últimos conceptos son la generalización de *para casi todo n* y *para infinitos valores de n* cuando se trata de una sucesión x_n. En el caso en el que x_α está finalmente para α en Y se dice que Y es un conjunto *residual* y si x_α esta frecuentemente para α en Y, se dice que Y es un conjunto *cofinal*.

La red $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *converge* a $x_0 \in X$, si para toda vecindad U_{x_0} de x_0, $x_\alpha \in U_{x_0}$ finalmente para α. Una red $y_\beta : B \to X$ es una *subred* de x_α si existe una función $s : B \to A$ tal que dado $\beta \in B$, $y_\beta = x_{s_\beta}$ y dado $\alpha \in A$, existe $\beta_\alpha \in B$ tal que si $\beta_\alpha \leq \gamma$, $\alpha \leq s_\gamma$.

En espacios topológicos de Hausdorff las redes convergentes lo hacen a un único punto, y recíprocamente, si todas las redes que convergen lo hacen a un único punto, se trata de un espacio topológico de Hausdorff (Hu, 1954, p. 73). En el caso que x_α converge a un único punto x_0 de X se nota $\underline{lim}(x_\alpha) = x_0$ o $x_\alpha \to x_0$.

En general, si el espacio no es 1-contable, los resultados que se tienen para clausura, cerradura, compacidad, etc. que se obtienen usando sucesiones siguen siendo válidos pero ahora en términos de redes. Por dar solo un ejemplo:

> Un punto x_0 de un espacio X, es un punto de acumulación de un conjunto E en X, si y solamente si, existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ en $E \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0 (Hu, 1954, p. 72).

Para una exposición detallada de tales resultados se recomienda al lector consultar Hu, (1954) o Kelley, (1955).

1.3 Semicontinuidad Inferior

De ahora en adelante el espacio topológico X en la definición de red, se tratará de $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales. Si $x : A \to \mathbb{R}$ es una red, se dice que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *es acotada*, si $|x_\alpha| < M$ para algún $M > 0$ y todo $\alpha \in A$. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red acotada, $a \in \mathbb{R}$ es el *límite inferior* de x_α y se nota

$$\underline{\lim}\, x_\alpha = a,$$

si dado $\varepsilon > 0$, $a-\varepsilon < x_\alpha$ finalmente para α y $x_\alpha < a+\varepsilon$ frecuentemente para α. En otras palabras, si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, $(a-\varepsilon, \infty)$ es residual y $(-\infty, a+\varepsilon)$ es cofinal. En caso que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ no esté acotada inferiormente, se dice que $\underline{\lim}(x_\alpha) = -\infty$. Por otro lado, si $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ está acotada inferiormente, pero no superiormente, entonces $\underline{\lim}(x_\alpha) = +\infty$.

La siguiente proposición nos asegura la existencia y unicidad del límite inferior y su demostración está inspirada en la definición de límite inferior dada por Megginson (1998).

Proposición 1.1 **(Existencia y unicidad)** *Si $x : A \to \mathbb{R}$ es una red, entonces $\underline{\lim}(x_\alpha)$ siempre existe en $\overline{\mathbb{R}}$ y este límite es único.*

Prueba: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una red no acotada en $\mathbb{R}$, la existencia del límite inferior está garantizada por la definición y será uno de los símbolos $+\infty$ o $-\infty$. Se supone ahora que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una red acotada. Entonces, por el axioma del extremo superior, el número a definido por

$$a = \sup_{\beta\in A}\left(\inf_{\alpha\geq\beta} x_\alpha\right)$$

existe en $\mathbb{R}$, es único y además,

$$a = \underline{\lim}(x_\alpha).$$

Para comprobar esto último, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, por la definición de extremo superior

$$\inf_{\alpha\geq\beta} x_\alpha < a+\varepsilon$$

para todo $\beta \in A$. Ahora bien, por la definición de extremo inferior existe α_0 con $\alpha_0 \geq \beta$, tal que $x_\alpha < a+\varepsilon$. Es decir, $x_\alpha < a+\varepsilon$ frecuentemente para α. Del mismo modo, por la definición de extremo superior, existe un $\beta_0 \in A$ tal que

$$\inf_{\alpha\geq\beta_0} x_\alpha > a-\varepsilon$$

por lo tanto $x_\alpha > a-\varepsilon$ para todo $\alpha \geq \beta_0$. Es decir, $x_\alpha > a-\varepsilon$ finalmente para α.

Lema 1.1 *Sean $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red acotada y $a = \underline{\lim}(x_\alpha)$. $b \le x_\alpha$ finalmente para α, si y solamente si $b \le a$.*

Prueba: Por reducción al absurdo, se supone en primer lugar que $b \le x_\alpha$ finalmente para α y que $b > a$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario $x_\alpha < a+\varepsilon < b+\varepsilon$ frecuentemente para α y como $b-\varepsilon < b \le x_\alpha$ finalmente para α. Por tanto, existe $\alpha_0 \in A$ tal que

$$b-\varepsilon < b \le x_{\alpha_0} < a+\varepsilon.$$

Cómo ε es positivo y arbitrario, $b \le a$. Lo cual es absurdo.

Se supone ahora que $b \le a$. En un primero caso, si $b < a$, entonces $b < x_\alpha$ finalmente para α. En caso que $a = b$, fijado $\varepsilon > 0$, $b-\varepsilon < x_\alpha$ finalmente para α. Por ser ε positivo y arbitrario, se deduce que $b \le x_\alpha$ finalmente para α.

Sea ahora X un espacio espacio topológico de Hausdorff. Un *funcional* es cualquier función $\phi : X \to \mathbb{R}$. Se dice que el funcional ϕ es *semicontinuo inferiormente* en x_0 si para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X con $\underline{lim}(x_\alpha) = x_0$, $\underline{\lim}\,\phi(x_\alpha) \ge \phi(x_0)$. Se dice que ϕ es semicontinuo en X, si es semicontinuo en todo x de X y se escribe $\phi \in]\mathrm{sci}(X)$. El concepto de semicontinuidad superior se define de manera similar de la siguiente manera: $\phi : X \to \mathbb{R}$ es un funcional *semicontinuo superiormente* en x_0, si $\overline{\lim}\,\phi(x_\alpha) \le \phi(x_0)$ para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ convergente a x_0. Basta usar la definición de continuidad por redes (Hu, 1954, p. 76) para notar que un funcional semicontinuo inferiormente y superiormente en x_0 es continuo en x_0 y visceversa.

El primer resultado que se demostrará es que la definición propuesta coincide con la usualmente dada.

Teorema 1.1 **(Equivalencia de las definiciones)** *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. $\phi \in sci(X)$, si y solo si $\phi^{-1}(a,+\infty]$ es abierto para todo $a \in \mathbb{R}$*

Prueba: Por reducción al absurdo se supone en primer lugar que $\phi^{-1}(a,+\infty)$ no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Así, $F = \phi^{-1}(-\infty,a]$ no es un conjunto cerrado y se pueden escoger $x_0 \in \overline{F}\setminus F$ con $\phi(x_0) > a$ y $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ tal que $\underline{lim}(x_\alpha) = x_0$ con $\phi(x_\alpha) \le a$. Por la definición de semicontinuidad inferior podemos suponer que $\phi(x_\alpha) \ge \phi(x_0)$ finalmente para α. Pero esto es absurdo, ya que

$$a \ge \phi(x_\alpha) \ge \phi(x_0) > a.$$

Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y suponga ahora que $\phi^{-1}(a,\infty)$ es un conjunto abierto. Sea $x_\alpha \to x_0$ en X, con $\phi(x_0) < \infty$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces, el conjunto

$$U_{x_0} = \{x \in X \mid \phi(x) > \phi(x_0) - \varepsilon\}$$

es una vecindad abierta de $x_0 \in X$. Por tal razón $x_\alpha \in U_{x_0}$ finalmente para α, lo que implica que $\phi(x_\alpha) > \phi(x_0) - \varepsilon$ finalmente para α. Lo anterior es cierto para todo $\varepsilon > 0$, por el lema anterior, $\phi \in \mathrm{sci}(X)$.

Cuando se cambia la palabra red por sucesión en la definición de semicontinuidad inferior, decimos que el funcional ϕ es *semicontinuo inferiormente por sucesiones*. Teniendo en cuenta esto y las propiedades de los espacios topológicos donde es válido el primer axioma de numerabilidad, se puede presentar el siguiente corolario cuya demostración es sencilla.

Corolario 1.1 (Implicaciones topológicas) *La semicontinuidad en general implica semicontinuidad por sucesiones. Si X es un espacio topológico que satisface el primer axioma de numerabilidad, la semicontinuidad por sucesiones implica semicontinuidad por redes. En el caso en el que X es un espacio métrico o normando, tenemos el primer axioma de numerabilidad y en consecuencia la semicontinuidad por sucesiones equivale a la semicontinuidad en general.*

1.4 Ejemplos

Una primera situación a analizar es la de qué tan general es la noción de semicontinuidad con respecto a la continuidad. Por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x > 0, x \in \mathbb{I} \\ 2 & \text{si } x < 0, x \in \mathbb{Q} \\ 3 & \text{si } x < 0, x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

es semicontinua inferiormente en 0 pero tiene una discontinuad de segunda especie en ese punto. En efecto. Como $\mathbb{R}$ es 1-contable, basta tomar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$x_n \to 0$. Ahora bien, como $\phi(x_n)$ solo puede tomar los valores $0,1,2,3$, en cualquier caso $\phi(x_n) \geq 0 = \phi(x_0)$ para casi todo n. Por otro lado, si el funcional $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad de primera especie en x_0, pero es semicontinuo en ese punto, se tiene que $\phi(x_0) = \text{mín}\{\phi(x_0^-), \phi(x_0^+\}$ (Figueiredo, 1989 p. 3).

Un ejemplo donde queda justificada la definición de semicontinuidad por redes, es uno en el que el dominio del funcional sea un espacio topológico de Hausdorff pero no 1-contable. Pues no se pueden usar las sucesiones. La construcción del ejemplo es la siguiente:

Sea $\mathcal{C} = \{F \subset \mathbb{R} \mid F \text{ es finito}\}$ y $\mathbb{R}$ el conjunto de los reales con la topología usual. Se define el espacio $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la topología generada por los abiertos básicos

$$N(f,C,\varepsilon) = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \sup_{x\in C} |f(x) - g(x)| < \varepsilon \right\}$$

donde $C \in \mathcal{C}$ y $\varepsilon > 0$. X con esta topología es un espacio topológico de Hausdorff donde no es válido el primer axioma de numerabilidad (Axler S., Ribet K. A. p.65-66). Se define

$$\phi : X \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \phi(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(0) > 0 \\ -1 & \text{si } f(0) \leq 0 \end{cases}$$

ϕ así definida, es semicontinua inferiormente en X. En efecto. Sea $f_0 \in X$ arbitrario y sea $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red en X tal que $f_\alpha \to f_0$. Si $\phi(f_0) = -1$, no hay nada que demostrar pues $\phi(f_\alpha)$ es uno de las valores 1 o -1 y en cualquier caso $\underline{\lim}(\phi(f_\alpha)) \geq \phi(f_0)$. Ahora bien en el caso que $\phi(f_0) = 1$, $f_0(0) > 0$. Entonces, si $g \in N(f_0, \{0\}, \frac{1}{2})$, $g(0) > 0$. Es decir, $\phi(g) = 1$. Como $f_\alpha \to f_0$, existe un $\alpha_0 \in A$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$, entonces $f_\alpha \in N(f_0, \{0\}, \frac{1}{2})$. Es decir,

$$\phi(f_\alpha) = 1 \geq \phi(f_0) = 1.$$

Por lo tanto ϕ es semicontinuo inferiormente.

Bibliografía

[1] Axler S., Ribet K. A. *A Taste of Topology*. Springer Verlag. 2005.

[2] Castro A. *Curso Métodos de Reducción Vía Minimax* En: Primer Simposio Colombiano de Análisis Funcional. Universidad Nacional de Colombia. 1981.

[3] Figueiredo, D. G. *The Ekeland Variational Principle with Aplication and Detours*. Springer Verlag.1989.

[4] Hu, S. T. *Elements of General Topology*. Holden Day. 1954.

[5] Kelley, J. L. *General Topology*. Springer Verlag.1955.

[6] Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer Verlag.

[7] Spivak, M. *Cálculo Infinitesimal*, (2 ed). Editorial Reverte. 1992