Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 8, N$^o$ 2. 2007

# La equivalencia de las representaciones de la solución particular por los métodos de reducción de orden y variación de parámetros

Carlos A.M. Salvadó
c_salvado@yahoo.com
Departamentos de Física y Matemática
Universidad del Valle de Guatemala

## Resumen.

Usando el método de variación de parámetros, construimos la solución particular de una ecuación diferencial de segundo orden. Luego demostramos que es una representación diferente pero equivalente a aquella solución construida por el método de reducción de orden.

**Palabras claves**: variación de parámetros, función de Green, reducción de orden.

## 1.1 Introducción

De la teoría de ecuaciones diferenciales no homogéneas se sabe que los métodos de variación de parámetros y funciones de Green dan representaciones idénticas de la solución particular [Bender y Orszag (2001)]. A pesar de que no está ampliamente diseminado, otro método que se puede utilizar para construir la solución particular es el método de reducción de orden [Hildebrand (1976)]. Pero aparentemente nadie ha demostrado en la literatura la relación que tiene con los métodos de variación de parámetros o funciones de Green [C.M. Bender, Washington University, St. Louis Missouri, comunicación personal]. En lo que sigue, consideraremos una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden, y escogeremos la función, que hace la ecuación no homogénea, ser la función delta de Dirac. Por lo tanto, la solución particular construida por los métodos de variación de parámetros y reducción de orden es la función de Green asociada con operadores diferenciales de segundo orden. Demostraremos que estas dos son representaciones diferentes pero equivalentes de la solución particular.

*Demostración.* Consideramos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = f(x)\,. \tag{1.1}$$

Si en los intervalos donde $a_1(x)$ y $a_0(x)$ son continuas, conocemos las soluciones linealmente independientes del problema homogéneo, digamos $y_1(x)$ y $y_2(x)$, el método de variación de parámetros da la solución particular [Bender y Orszag (2001)]

$$y_p^{VP}(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(\xi)\,f(\xi)}{W(\xi)}d\xi + y_2(x)\int^x \frac{y_1(\xi)\,f(\xi)}{W(\xi)}d\xi, \tag{1.2}$$

en donde $W$ es el Wronskiano de $y_1$ y $y_2$:

$$W(\xi) = y_1(\xi)\,y_2'(\xi) - y_1'(\xi)\,y_2(\xi)\,, \tag{1.3}$$

y prima denota la primera derivada con respecto a $\xi$. Especializando la función que hace (1.1) no homogénea a la función delta de Dirac

$$f(x) = \delta\left(x - x'\right), \tag{1.4}$$

y substituyendo (1.4) en (1.2), lo que resulta es una representación de la función de Green asociada con el operador diferencial de (1.1) [Bender y Orszag (2001)]:


Derechos Reservados © 2009 Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/)

$$g^{VP}\left(x|x'\right) = -\frac{y_1\left(x\right)y_2\left(x'\right)}{W\left(x'\right)} + \frac{y_2\left(x\right)y_1\left(x'\right)}{W\left(x'\right)}. \tag{1.5}$$

La solución particular de (1.1), por el método de reducción de orden [Hildebrand (1976)], está dada por

$$y_I^{RO}\left(x\right) = y_1\left(x\right)\int^{x}\frac{d\eta}{y_1^2\left(\eta\right)p\left(\eta\right)}\int^{\eta}y_1\left(\xi\right)p\left(\xi\right)f\left(\xi\right)d\xi$$

$$\tag{6}$$

$$+y_2\left(x\right)\int^{x}\frac{d\eta}{y_2^2\left(\eta\right)p\left(\eta\right)}\int^{\eta}y_2\left(\xi\right)p\left(\xi\right)f\left(\xi\right)d\xi$$

en donde

$$p\left(x\right) = \int^{x}a_1\left(\zeta\right)d\zeta. \tag{1.6}$$

La formula de Abel [Bender y Orszag (2001)] relaciona (1.3) con (1.6) en la siguiente manera:

$$W\left(x\right) = \frac{A}{p\left(x\right)} \tag{1.7}$$

donde $A$ es una constante arbitraria.

Substituyendo (1.7) en (6), tenemos

$$y_I^{RO}\left(x\right) = y_1\left(x\right)\int^{x}\frac{W\left(\eta\right)d\eta}{y_1^2\left(\eta\right)}\int^{\eta}\frac{y_1\left(\xi\right)f\left(\xi\right)}{W\left(\xi\right)}d\xi$$

(9)

$$+y_2\left(x\right)\int^{x}\frac{W\left(\eta\right)d\eta}{y_2^2\left(\eta\right)}\int^{\eta}\frac{y_2\left(\xi\right)f\left(\xi\right)}{W\left(\xi\right)}d\xi.$$

Construimos otra representación de la función de Green asociada con el operador diferencial de (1.1), de acuerdo con el método de reducción de orden, substituyendo (1.4) en (9):

$$g^{RO}\left(x|x'\right)=\frac{y_1\left(x\right)y_1\left(x'\right)}{W\left(x'\right)}\int^{x}\frac{W\left(\eta\right)}{y_1^2\left(\eta\right)}d\eta+\frac{y_2\left(x\right)y_2\left(x'\right)}{W\left(x'\right)}\int^{x}\frac{W\left(\eta\right)}{y_2^2\left(\eta\right)}d\eta. \tag{1.8}$$

Si las soluciones particulares de (1.1) por los métodos de variación de parámetros y reducción de orden dan el mismo resultado, las funciones de Green (1.5) y (1.8) deben de ser iguales. Asumiendo igualdad término por término, tenemos las siguientes alternativas: o

$$-y_2\left(x'\right)=y_1\left(x'\right)\int^{x}\frac{W\left(\eta\right)}{y_1^2\left(\eta\right)}d\eta \quad \text{y} \quad y_1\left(x'\right)=y_2\left(x'\right)\int^{x}\frac{W\left(\eta\right)}{y_{21}^2\left(\eta\right)}d\eta \tag{1.9}$$

o

$$-y_1\left(x\right)=y_2\left(x\right)\int^{x}\frac{W\left(\eta\right)}{y_2^2\left(\eta\right)}d\eta \quad \text{y} \quad y_2\left(x\right)=y_1\left(x\right)\int^{x}\frac{W\left(\eta\right)}{y_1^2\left(\eta\right)}d\eta \tag{1.10}$$

Mientras que los términos a la izquierda del signo de igualdad de (11) son solamente funciones de $x'$ y los términos del lado derecho son funciones de $x'$ y $x$, ambos lados de las ecuaciones en (12) son solamente funciones de $x$. Por lo tanto escogemos la segunda alternativa como la correcta. Tenemos entonces

$$\int^{x}\frac{W\left(\eta\right)}{y_2^2\left(\eta\right)}d\eta=-\frac{y_1\left(x\right)}{y_2\left(x\right)} \quad \text{y} \quad \int^{x}\frac{W\left(\eta\right)}{y_1^2\left(\eta\right)}d\eta=\frac{y_2\left(x\right)}{y_1\left(x\right)}, \tag{1.11}$$

y por inversión de las integrales,

$$\frac{W(x)}{y_2^2(x)} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right] \quad \text{y} \quad \frac{W(x)}{y_1^2(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right] \tag{1.12}$$

que dan la relación en (1.3). Por lo tanto hemos demostrado la igualdad de las funciones de Green usando los métodos de variación de parámetros y reducción de orden, y, por lo tanto, los dos métodos dan diferentes pero equivalentes representaciones de la solución particular de (1.1).

**EJEMPLO 1.1** Como se puede apreciar, las representaciones de la función de Green asociadas con el operador diferencial de (1.1), ecuaciones (1.5) y (1.8), son singulares. Usaremos un ejemplo de una ecuación diferencial cuyas soluciones del problema homogéneo pasan por cero, y encontraremos que los métodos de variación de parámetros y reducción de orden dan la misma función de Green.
Consideraremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x) = 0 \tag{1.13}$$

que tiene las soluciones

$$y_1(x) = \sin x \quad \text{y} \quad y_2(x) = \cos x \tag{1.14}$$

con Wronskiano

$$W = -1. \tag{1.15}$$

Substitución de (1.14) y (1.15) en (1.5) y (1.8), nos da la función de Green [invariante bajo traslaciones porque los coeficientes de (1.13) son constantes]

$$g^{VP}(x|x') = g^{RO}(x|x') = g(x-x') = \sin(x-x'). \tag{1.16}$$

**Agradecimientos.** Uno de nosotros está profundamente agradecido de personas cuya ayuda permitió la fácil producción de este artículo: de Irene Aguilar, Directora del Departamento de Física de la Universidad del Valle de Guatemala, que lo proveyó con medicamentos; de Maribel Samayoa de Rosales que donó tiempo de computadora del Café Internet en el mini mercado Economarket ("la tiendita"), y Liesel de Leiva, de la panadería La Masein, que lo proveyó con desayunos y almuerzos.

# Bibliografía

[1] Bender, C.M. y S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.* Springer-Verlag, Berlin. 2001.

[2] Hildebrand, F.B. *Advanced Calculus for Applications,* Prentice-Hall, Inc., New Jersey. 1976.


Derechos Reservados © 2009 Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/)