Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 9, N^o 1. 2009

Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna

Edward Parra S.
edward.parra@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica
San Diego Bilingual HighSchool

Resumen

El propósito de este trabajo es realizar un recorrido por las principales obras de Arquímedes de Siracusa, algunas de las anécdotas que rodean su figura, así como realizar un estudio de sus principales aportes a la matemática moderna y su didáctica. También revisaremos algunos aspectos importantes de su obra *El Método*.

Abstract

The purpose of this articles is make a tour for the main Archimedes's work, yours anecdotes, and to *realize* a study of main contributions to the modern mathematics.
We check some appearance about "The Method".

Palabras claves:Arquimedes de Siracura, Historia de la Matemática, El Método, Anécdotas, Aportes.

1.1 La matemática del siglo III aec

En el siglo III aec, Roma era la potencia mediterránea por excelencia. Roma, en su afán de conquista, se apodera de los estados helénicos y de la poderosa Cartago. La única ciudad que resiste a los embates de los romanos es Siracusa, pero ya en el 212 aec cae en manos de Roma.
Durante III aec, el poder político y militar estaba en manos de los romanos, pero el poder científico, continuaba en manos de los griegos. No era la gran cultura helénica del siglo V aec, en el que habían florecido tantos filósofos, artistas y científicos, tales como Herodoto, Hipócrates, Heráclito, Parménides, Zenón, Esquilo, Sófocles, Aristófanes y Demócrito.
La cultura científica helénica se ve obligada a emigrar a las colonias griegas de Asia Menor, Egipto, Italia y demás, debido a la invasión que sufrían por parte de los romanos.
Es así como en Alejandría-Egipto nace el centro científico más importante del mundo griego y también el más duradero, sitio de comunicación de los más grandes investigadores de la época, tanto de griegos como de romanos. (Véase [1]).

En Alejandría se construye la Biblioteca y el Museo, donde centenares de sabios y estudiosos se enseñan, trabajan e investigan. La Biblioteca fue dirigida, especialmente en la época de mayor brillo, por grandes sabios, como por ejemplo Eratóstenes. Es a este ambiente científico de Alejandría al que se vinculan directa e indirectamente las tres figuras más importantes de la matemática de la antigüedad: Euclides, Arquímedes y Apolonio. Estos fueron los miembros más representativos del *período de oro* de la matemática griega.
En el siglo III aec nace uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos: Arquímedes de Siracusa.

Figura 1.1 Grecia Antigua

1.2 Arquímedes de Siracusa (circa $287-212$ aec)

Según [1], Arquímedes fue una figura célebre y famosa en Siracusa, ya fuera por sus méritos científicos o por sus excentricidades y grandes inventos que se le atribuyeron, o por su vinculación con la familia real. Para [3], “el más grande matemático de la antigüedad, tuvo la fortaleza de innovación de Platón y el procedimiento correcto de Euclides".
Las fuentes primarias sobre la vida de Arquímedes se perdieron, en especial el trabajo de Heracleides *Vida de Arquímedes* y la reconstrucción biográfica de Arquímedes es producto de varios fragmentos de diversos autores, especialmente historiadores de las guerras púnicas.
Con base en estas observaciones se sabe que Arquímedes nació en 287 aec, vivió 75 años y murió a causa del saqueo que siguió a la caída de Siracusa en manos de Marcelo en el 212 aec.
Su padre fue Pheidias el astrónomo.
En virtud del rigor, la originalidad y la trascendencia de sus resultados se le considera el primer matemático moderno. Arquímedes en algún momento de su formación visitó Alejandría y estuvo en contacto con los sucesores de Euclides. Particularmente mantuvo una relación estrecha con Conon de Samos ($280-220$ aec), Dositeo de Pelusa y Eratóstenes de Cirene ($276-194$ aec) (estos tres fueron sus maestros en Alejandría). El primero fue el descubridor de la espiral que hoy conocemos con el nombre de espiral de Arquímedes y estudió los puntos de intersección entre dos secciones cónicas. El tercero fue director de la biblioteca de Alejandría a partir de 235 aec y autor del conocido método de la Criba para la determinación de números primos.
Cuando Arquímedes regresó a Siracusa, dedicó toda su vida a la investigación científica.
Mientras a Euclides se le consideraba el *maestro por excelencia*, creador de, lo que en el lenguaje moderno podría decirse, un libro de texto. Apolonio, era un profesor que enseñaba e investigaba. Arquímedes era un investigador innato, sus escritos son verdaderas memorias científicas.(Véase [1] y [8]).

La obra de Arquímedes fue desarrollada fundamentalmente a través de cartas escritas en el más absoluto rigor euclidiano y con un marcado énfasis en la aplicación de los métodos matemáticos a la Mecánica y la Física. Así por ejemplo en *Sobre el equilibrio de las figuras planas* expone la ley de las palancas, *Sobre los cuerpos que flotan* estudia los principios básicos de la hidrostática, etc. También a él pertenecen toda una serie de inventos prácticos y artefactos bélicos como: el tornillo sinfín, la rueda dentada, los sistemas de palancas, la polea móvil, el planetario, las catapultas, etc.

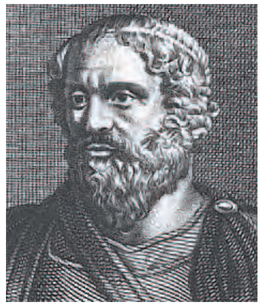

Figura 1.2 Images/Arquímedes

Durante su estancia en el valle del Nilo, se cuenta que Arquímedes inventó el llamado *Tornillo de Arquímedes*, un dispositivo para elevar agua desde un nivel bajo hasta otro más alto. Lo cierto es que este invento se usa en la actualidad. Su creación da evidencia del doble carácter de Arquímedes, podía preocuparse de materias prácticas o podía investigar en tópicos más abstracto.

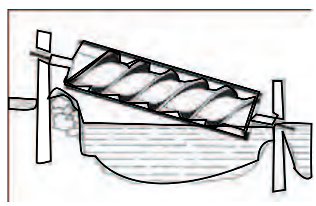

Figura 1.3 Tornillo de Arquímedes

En lo fundamental su obra matemática estuvo vinculada a la solución de problemas sobre cuadraturas, curvaturas y cálculo de tangentes por lo que se le considera un precursor del Cálculo Diferencial e Integral. En el terreno metodológico llevo el Método de Exhaución a alcanzar sus máximas conquistas demostrativas. Muchas de estas fueron previamente divisadas por un grupo importante de métodos; que en este momento tenían un valor fundamentalmente heurístico, pero cuya maduración posterior constituiría los principios del Cálculo Infinitesimal y el Método Experimental en ciencias naturales. Entre ellos son de interés: el método Mecánico-Geométrico, el método de Sumas Integrales y el método de Tangencia.

Tal fue la fascinación de Arquímedes por la Mecánica que no sólo se ocupó de buscar basamento geométrico para sus principios sino que también logró que ésta penetrara en sus métodos matemáticos. Así en su *Carta a Eratóstenes* también conocida como *Tratado del Método* redescubierta en 1906, afirma: *Estoy...convencido de que el método no es menos útil para la demostración de los teoremas. Pues algunas de las cosas que se me hicieron claras por vía* mecánica, *se demostraron más tarde de forma geométrica, porque el modo de observación de este tipo carece de fuerza probatoria. Pues es más fácil realizar la demostración cuando previamente se ha obtenido una idea de la cuestión por vía* Mecánica, *que cuando no se cuenta con este conocimiento previo*

Arquímedes llevó el Método de Exhaución y su aspecto aritmético a producir sorprendentes resultados como la estimación $3.14085 \leq \pi \leq 3.14286$ en *Medida del Círculo* haciendo inscripciones y circunscripciones de polígonos de hasta 96 lados. Al decir del historiador norteamericano E.T. Bell, citado por [13]: *Aplicando el Método de Exhaución, Arquímedes se reveló como un maestro consumado del rigor matemático y un artista perfecto*.

En *Sobre Conoides y Esferoides* determina el volumen de paraboloides e hiperboloides de revolución (Conoides), así como de Elipsoides de revolución (esferoides) estratificando en cada paso con cilindros de igual altura. En *Sobre espirales* repite el método para calcular el área de la primera espiral de la hoy conocida como espiral de Arquímedes, estratificando con sectores circulares de igual amplitud en cada caso.

A diferencia de sus predecesores griegos, Arquímedes, también desarrolló una maestría de cómputo original. Esto se manifiesta en: el *Problema de los bueyes* (resuelve la ecuación), el método de cálculo de raíces (aún no bien aclarado), y en *Arenario* (o *El contador de arena*).

En *El Arenario* haciendo uso magistral y reiterativo del conocido hoy como Axioma de Arquímedes (*Las magnitudes tienen una razón entre si, cuando multiplicadas son capaces de superarse la una a la otra*, según la definición 4 de los **Elementos** y que antes fue ampliamente utilizado por Eudoxio en la fundamentación de su teoría de proporciones) se propone estimar la cantidad de granos de arena que existen en el mundo usando un embrión de lo que hoy llamamos notación científica o exponencial para denotar números muy grandes. Este trabajo es además importante por contener una de las pocas referencias conocidas a los trabajos del matemático y astrónomo Aristarco de Samos ($310-230$ a.C.), exponente de la teoría heliocéntrica del universo (el sol como centro) y pionero en la determinación del tamaño y la distancia entre la luna y el sol.

La obra matemática de Arquímedes fue una fuente de inspiración importante para los precursores del Cálculo Infinitesimal a partir del siglo XVI. Al decir de W. Leibniz ($1646-1716$), citado por [6], *estudiando a Arquímedes, dejas de asombrarte por los éxitos de los matemáticos actuales*.

1.3 Anécdotas sobre Arquímedes

1.3.1 La corona de oro de Hierón

La anécdota más conocida de Arquímedes es la de *la corona de oro de Hierón*, que se conoce a través de Vitruvio (véase [1]). Textualmente es la siguiente:

> "Entre el gran número admirables descubrimientos realizados por Arquímedes, hay que señalar el que voy a citar y en el que puso de manifiesto una sutileza casi increíble. Cuando Hierón reinaba en Siracusa, este príncipe, por los éxitos logrados en sus empresas, se propuso ofrecer en un cierto templo una corona de oro a los dioses inmortales. Convino la confección de la obra con un artesano mediante una buena suma de dinero y la entrega de la cantidad de oro en peso. El artesano entregó la corona en la fecha convenida con el rey, quien la encontró perfectamente ejecutada, pareciendo que contuviera todo el oro que le había entregado. Pero habiendo obtenido indicios de que el artesano había retenido una parte de oro, el rey, indignado ante ese engaño y no teniendo a mano los medios para demostrar al artesano su fraude, encargó a Arquímedes que se ocupase del asunto y que con su inteligencia encontrase esos medios. Un día que Arquímedes, preocupado por este asunto, entró por casualidad en una casa de baños, advirtió que a medida que se introducía a la bañera, es agua se desbordaba de la misma. Esta observación le hizo descubrir la razón que buscaba, y sin aguardar más por la alegría que este hecho le producía, salió del baño aún desnudo y corriendo hacia su casa gritaba ‰Eureka!‰Eureka!, es decir, ‰lo he encontrado!‰lo he encontrado!. A raíz de este descubrimiento encargó entonces dos masas de igual peso que el de la corona, una de oro y otra de plata. Sumergió luego la masa de plata en un vaso , lo que hizo salir una cantidad de agua igual al volumen de esa masa y volvió a llenar el vaso con una igual cantidad de agua que había salido y que se preocupó de medir, de manera que pudo conocer la cantidad de agua que correspondía a la masa de plata que había introducido en el vaso. Después de esa experiencia sumergió igualmente la masa de oro en el vaso lleno de agua, y después de haberla retirado midió nuevamente el agua desalojada, encontrando que la masa de oro no había desalojado tanta agua como la de plata y que la diferencia en menos era igual a la diferencia entre los volúmenes de la masa de oro y de la masa de plata de igual peso. Finalmente volvió a llenar el vaso sumergiéndole esta vez la corona, que desalojó más agua de la que había desalojado la masa de oro de igual peso, pero menos de la respectiva de la masa de plata. Calculando entonces, de acuerdo con esas experiencias, en cuánto la cantidad de agua que la corona había desalojado era mayor de aquella que había desalojado la masa de oro, conoció cuánta era la plata que se había mezclado al oro, mostrando claramente el fraude del artesano. "

Figura 1.4 Eureka

1.3.2 Dadme un punto de apoyo. . .

Otra anécdota conocida de Arquímedes, según la cual éste habría pronunciado la célebre frase, tan retórica como absurda (véase[1]): *Dadme un punto de apoyo y levantaré el mundo*, está narrada por Pappus[1] y Plutarco, en conexión con el problema: mover un peso dado, mediante una fuerza dada.

> “
>
> Arquímedes, pariente y amigo de Hierón, le escribió que con una potencia dada se puede mover un peso igualmente dado, y jugando, como suele decirse, con la fuerza de la demostración le aseguró que si le dieran otra tierra movería ésta después de trasladarse a aquella. Maravillado Hierón y pidiéndole que verificará con obras este problema e hiciese ostensible cómo se movía alguna gran mole con una potencia pequeña, utilizó un gran transporte de tres velas del arsenal del rey, que fue sacado a tierra con mucho trabajo y a fuerza de un gran número de brazos; cargándole de gente y del peso que solía echársele, y sentado lejos de él, sin esfuerzo alguno y con solo mover la mano al cabo de una máquina de una fuerza atractiva, lo llevó así derecho y sin detenerse

[1]Pappus de Alejandría, siglo III de nuestra era.

como si corriese por el agua. Pasmóse el rey, y convencido del poder de arte encargó a Arquímedes que le construyese toda especie de máquinas de sitio, bien fuese para defenderse, o más bien para atacar; de las cuales él no hizo uso, habiendo pasado la mayor parte de su vida exenta de guerra y en la mayor comodidad; aunque luego tuvieron los siracusanos menester de aquellas máquinas y de su artífice. ”

1.3.3 La muerte de Arquímedes

Plutarco se refiere a la muerte de Arquímedes (véase [1]), después que el ejército romano hubo conquistado las partes más importantes de Siracusa:

> “Tomadas también éstas, al mismo amanecer marchó Marcelo por los Hexápilos, dándole el parabién todos los jefes que estaban a sus órdenes; más de él mismo se dice que al ver y registrar desde lo alto la grandeza y la hermosura de semejante ciudad, derramó muchas lágrimas, compadeciéndose de lo que iba a suceder, por ofrecer a su imaginación qué cambio iba a tener de ahí a poco en su forma y aspecto, saqueada por el ejército. En efecto, ninguno de los jefes se atrevía a oponerse a los soldados, que habían pedido se les concediese el saqueo, y aun muchos clamaban por que se le diese fuego y se le asolase. En nada de esto convino Marcelo, y solo por fuerza y repugnancia condescendió en que se aprovecharan de los bienes y de los esclavos, sin que ni siquiera tocaran a las personas libres, mandando expresamente que no se diese muerte, ni se hiciese violencia, ni se esclavizase a ninguno de los siracusanos. . . Más lo que principalmente afligió a Marcelo fue lo que ocurrió con Arquímedes: hallábase éste casualmente entregado al examen de cierta figura matemática y fijos en ella su ánimo y su vista, no sintió la invasión de los romanos ni la toma de la ciudad. Presentósele repentinamente un soldado, dándole orden de que lo siguiese a casa de Marcelo; pero él no quiso antes de resolver el problema y llevarlo hasta la demostración; con lo que irritado el soldado, desenvainó la espada y le dio muerte. ”

1.3.4 Sobre la tumba de Arquímedes

El deseo expresado por Arquímedes era que en su tumba se grabara una figura geométrica que recordara uno de sus más grandes descubrimientos geométricos, el cual se cumplió. Un siglo y medio después Cicerón lo encontró ya cuando los mismos siracusanos se habían olvidado de su figura y fama. Según Cicerón (véase [1].):

> “. . . Arquímedes, cuyo sepulcro ignorado por los siracusanos, rodeado de zarzas y espesos matorrales hasta el punto de haberse perdido todo rastro de él, yo descubrí siento

> cuestor de Siracusa. Yo conocía ciertos versos senarios, copias de otros que habían sido inscriptos en su monumento, las cuales declaraban que habían en su sepulcro una esfera con un cilindro. Después de haber recorrido todos los innumerables sepulcros que hay cerca de la puerta de Agrigentum, vi una pequeña columna que no se levantaba mucho de los matorrales, en la cual estaba la figura de una esfera y de un cilindro. Dije entonces a los principales siracuanos que estaban conmigo que creía haber encontrado lo que tanto buscaba. Comenzaron muchos a hacer abrir el camino hasta descubrir el sepulcro. De este modo pudimos penetrar hasta el otro lado de la base. Apareció un epigrama, medio borradas las últimas palabras de los versos. De esta manera, una ciudad de las más ilustres de Grecia, en otros tiempos la más docta, hubiera ignorado el monumento sepulcral de un ciudadano suyo tan ilustre, si no lo hubiese aprendido de un hombre de la pequeña ciudad de Arpinum. ”

Hoy día la tumba no existe, pero en las proximidades de Siracusa existe un lugar denominado *la tumba de Arquímedes*.

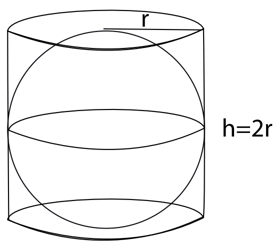

Figura 1.5 Figura inscrita sobre la tumba de Arquímedes

1.4 Características de sus tratados

Los tratados son, sin excepción alguna, monumentos de la exposición matemática, como lo menciona [10], la revelación gradual del plan de ataque, la maestría en el orden de las proposiciones, la severa eliminación de las cosas que eran irrelevantes para sus propósitos, y todo el compendio de su obra, son impresionantes en su perfección como creador de magnificas obras para sus lectores.
Las demostraciones geométricas de Arquímedes presentan los siguientes rasgos principales:

- Descansan en la tradición de la teoría de las proporciones.
- Parten de algunas asunciones básicas y especialmente significativas para los teoremas considerados.
- Los resultados conocidos o teoremas ya aprobados, aducidos en el curso de la demostración, se usan sin cita o referencia expresa, como objetos de dominio público.
- Utilizan métodos resolutivos de comprensión y aproximación que incluyen sustancialmente la reducción al absurdo.
- Ocasionalmente también recurren a otras técnicas de construcción.
- Las demostraciones de Arquímedes suelen contraerse a la consideración de unos pocos problemas y constituyen deducciones rigurosas, pero informales, al servicio de un desarrollo sustancial del conocimiento matemático.

1.5 Principales trabajos de Arquímedes

A lo largo de la historia cuando se hace referencia a que un descubrimiento fue realizado por un determinado personaje es difícil demostrar que es así. En este apartado se estudiarán algunas de las muchas obras o trabajos que se le atribuyen a Arquímedes de Siracusa, según la bibliografía consultada. El objetivo de este apartado no es hacer un estudio exhaustivo de cada libro; si no una revisión de algunos temas para que el lector obtenga un conocimiento general de los trabajos que realizó Arquímedes.
La recuperación de las matemáticas de Arquímedes desde sus fuentes griegas ha sido un proceso difícil y no se tiene certeza de la originalidad de sus aportes. Se dice que este matemático inició sus estudios al intentar resolver tres problemas conocidos en esta época: La cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. Estos problemas debían resolverse utilizando solamente regla (sin marcas) y compás, instrumentos que, al parecer son los que utiliza Euclides en su obra. Son problemas sin solución exacta usando regla y compás, cosa que se ha probado mucho después, aunque tienen solución por otros métodos.
Las obras que hoy conocemos suelen encuadrarse dentro de tres grupos más o menos característicos:

1. Escritos matemáticos dirigidos a la demostración de proporciones sobre áreas y volúmenes de figuras limitadas por líneas o superficies curvas.
2. Obras que proceden a análisis geométricos de problemas estáticos e hidrostáticos, o se sirven de consideraciones mecánicos en el tratamiento de cuestiones geométricas.
3. Trabajos con un aire de miscelánea matemática.

Las obras de Arquímedes que desde la Edad Media se conocen por medio del códice de Heiberg y el de Valla, que se encontraron en Constantinopla, son las siguientes:

- Sobre la esfera y el cilindro.
- Sobre la medida del círculo.
- Sobre conoides y esferoides.
- Sobre las espirales.
- El arenario.
- Cuadratura de la parábola.
- El Método.
- Sobre los cuerpos flotantes.
- Stomachion.
- El libro de los lemas.
- El problema de los bueyes.
- Trabajos sobre mecánica y óptica.
- Cuerpos flotante.
- Equilibrio de los plano.
- Sobre las espirales.
- Medida del círculo.

A Continuación realizaremos una breve reseña de sus principales:

1.5.1 El Método.

El estudio de este trabajo de Arquímedes se profundizará en una sección posterior.

1.5.2 Cuerpos flotantes.

Se enuncian algunos resultados sobre la posición de equilibrio de un segmento de paraboloide de revolución parcialmente sumergido en un fluido. En este tratado, elaborado también a la manera euclídea, aparece el famoso *Principio de Arquímedes* de la Hidrostática. Para ejemplificar el contenido del libro, se presentarán algunos postulados y proposiciones de los dos libros que Arquímedes escribe sobre los cuerpos flotantes.

1.5.3 Postulados

1. Supongamos que un fluido es de tal carácter, que sus partes reposan de igual forma y siendo continuas, la parte que está menos empujada es conducida por la que está más empujada, y que cada una de sus partes es empujada por el fluido que está encima de ella en una dirección vertical, si el fluido está sumergido en cualquier sustancia y comprimida por algo más.
2. Los cuerpos que son impulsados hacia arriba en un fluido, son impulsados hacia arriba a lo largo de la perpendicular (de la superficie) que pasa a través de su centro de gravedad.

1.5.4 Proposiciones

1. Si una superficie es cortada por un plano que pasa a través de cierto punto y si la sección es siempre una circunferencia (de un círculo) y el centro es el punto mencionado, la superficie es de una esfera.
2. La superficie de cualquier fluido está en reposo, si es la superficie de una esfera cuyo centro es el mismo que el de la tierra.
3. Los sólidos aquellos que, tamaño a tamaño, son de igual peso con el fluido, si los deja caer en el fluido, se sumergen de tal forma que no se proyectan sobre la superficie pero no se hunden más abajo.

4. Un sólido más ligero que un fluido, si es colocado en éste, no estaría completamente sumergido, pero parte de éste se proyectaría sobre la superficie.

5. Cualquier sólido más ligero que un fluido, si se sumerge parte de él, el peso del sólido sería igual al peso del fluido desplazado.

6. Si un sólido es más ligero que un fluido y se sumerge fuertemente en él, el sólido sería llevado hacia arriba por una fuerza igual a la diferencia entre su peso y el peso del fluido desplazado.

7. Cualquier sólido más pesado que un fluido y situado en él, se sumergiría hasta el fondo del fluido, y si se pesa dicho sólido dentro del fluido resultaría más ligero que su verdadero peso, por el peso del fluido desplazado.

8. Si un sólido con la forma de un segmento de una esfera, y de una sustancia más ligera que el fluido, es colocado en éste, de tal manera que su base no toca el fluido; el sólido reposaría en la posición en que su eje es perpendicular a la superficie del fluido; y si el sólido es forzado en una posición semejante que su base toca el fluido sobre un lado y luego se libera, este no permanecería en esta posición, pero retornaría a una posición simétrica.

9. Si un sólido con la forma de un segmento de esfera, y de una sustancia más ligera que un fluido, es colocado en éste, de tal manera que su base está completamente bajo la superficie del fluido; el sólido estaría en reposo en la posición que su eje es perpendicular a la superficie del fluido.

10. Si un sólido más ligero que un fluido está en reposo dentro de éste, el peso del sólido es al peso del mismo volumen en fluido, como la porción sumergida del sólido es a todo el sólido.

11. Si un segmento de un paraboloide recto en revolución, cuyo eje no es más grande que $\frac{3}{4}p$, y con una gravedad específica menor que la del fluido, es colocado en el fluido con su eje inclinado a la vertical en algún ángulo, asimismo la base del segmento no toca la superficie del fluido, el segmento del paraboloide no permanecería en esta posición, sino que retornaría a la posición en la que su eje es vertical.

12. Si un segmento de un paraboloide en revolución, cuyo eje no es más grande que $\frac{3}{4}p$ y cuya gravedad específica es menor que la del fluido, con su eje inclinado en algún ángulo a la vertical, asimismo su base esta completamente sumergida, el sólido no permanecería en esta posición, y regresaría a la posición en la que su eje es vertical.

En estas proposiciones se observa que Arquímedes utiliza por primera vez al paraboloide como cuerpo de flotación y lo estudia desde un corte transversal: la parábola.

1.5.5 Equilibro de los planos.

Se estudian los resultados sobre el centro de gravedad de figuras poligonales, del segmento de parábola y del trapecio parabólico. Aunque es un tratado de Estática, formalmente sigue la línea euclídea con definiciones, postulados y demostraciones en los que además de conceptos geométricos se utilizan el peso y el centro de gravedad de figuras. En este escrito Arquímedes formula la famosa *Ley de la palanca*.
Algunos postulados que se utilizan en el libro dicen lo siguiente:

- El centro de gravedad de un paralelogramo está en la recta que une los puntos medios de los lados opuestos.

- Si AB es una magnitud cuyo centro de gravedad es C, y AD es una parte de la misma, cuyo entro de gravedad es F, entonces el centro de gravedad de la diferencia estará en el punto G de FC tal que : $GC:CF = AD:DE$

1.5.6 Medida del círculo.

Se estudian los resultados sobre la equivalencia entre el círculo y el triángulo de base la circunferencia del círculo y altura el radio (es decir, reducción de la cuadratura del círculo a la rectificación de la circunferencia), y cálculo aproximado de la razón entre la circunferencia y el diámetro (valor aproximado del número π).
Algunos resultados son:

1. El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el cual uno de los catetos es igual al radio y el otro a la circunferencia del círculo. Lo demuestra comprobando que el área del círculo no es mayor, y tampoco menor, que área del triángulo, por lo tanto sólo puede ser igual.

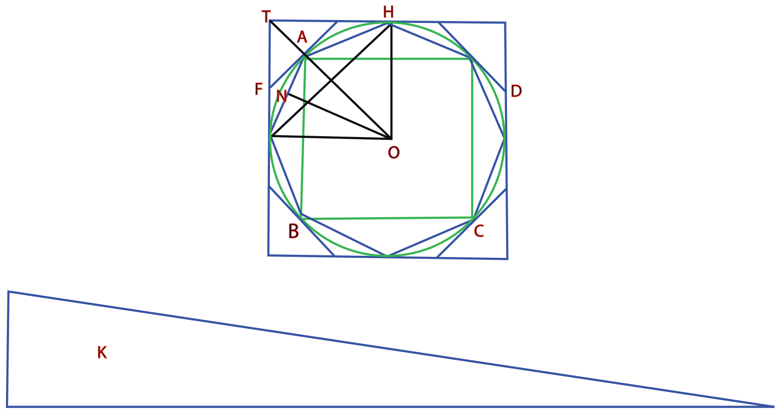

Figura 1.6 Área del Círculo - Área del triángulo

2. El área del círculo es al cuadrado de su diámetro 11 a 14 (el círculo es los $11/14$ del cuadrado circunscrito si la longitud de la circunferencia es $3\frac{1}{7}$ veces el valor del diámetro).

3. El perímetro de todo círculo es igual al triple del diámetro aumentando en un segmento comprendido entre $\frac{10}{71}$ y $\frac{1}{7}$ de dicho diámetro (lo que equivale a decir que el perímetro del círculo es menor que los $3\frac{1}{7}$ del diámetro puesto que es superior a los $3\frac{10}{71}$ de este diámetro).

4. Arquímedes encontró la siguiente acotación para $\sqrt{3}$:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

1.5.7 Sobre la esfera y el cilindro

Muestra los resultados sobre la esfera, el cono y el cilindro, en particular la propiedad de la razón de 2 a 3 entre la esfera y el cilindro circunscrito, tanto en superficie total como en volumen. Consta de dos libros en los que Arquímedes determina las áreas y volúmenes de esferas y cuerpos relacionados con ellas. Euclides había demostrado en sus *Elementos* que el volumen de dos esferas es entre sí como los cubos de sus diámetros, o el volumen de una esfera es proporcional al cubo de su diámetro. Además de determinar el área y el volumen de la esfera, también encuentra el área lateral del cilindro. Arquímedes comienza con definiciones e hipótesis. La primera hipótesis o axioma es que entre todas las líneas que tienen los mismos extremos, la recta es la más corta. Otros axiomas se refieren a las longitudes de las curvas como el segundo axioma, que dice: de dos líneas planas convexas que unen dos puntos situados en el mismo lado de la recta que los une, y donde una de las cuales envuelve a otra, la envolvente es la de mayor longitud. Después de una serie de proposiciones preliminares, en el libro I, llega a las proposiciones de gran interés que son:

- La superficie de cualquier esfera es cuatro veces la de su círculo máximo, i.e., $4\pi r^2$.
- Cualquier esfera es igual a cuatro veces el cono que tiene su base igual al círculo máximo de la esfera, y su altura igual al radio de la esfera.
- Cortar una esfera con un plano de manera que los volúmenes de los segmentos obtenidos estén en una razón dada.

1.5.8 Sobre el Arenario

Aunque la mayoría de la obra de Arquímedes radica en la geometría y en aplicaciones físicas en esta obra se puede apreciar su creatividad. En esta obra Arquímedes intenta probar que el número de gramos de arena no es infinito sino que existen unos números cuyo orden de magnitud es como el número de granos de arena que hay en el universo. Arquímedes lo expresa así:

> “Hay algunos que creen que el número de granos de arena es infinito en cantidad y por arena entiendo no sólo la que existen en Siracusa y el resto de Sicilia, sino también la que se encuentra en cualquier región habitada o sin habitar. Hay también algunos que, sin considerarlo infinito, creen que no existe una cifra lo bastante grande para exceder a su magnitud. Y está claro que quienes mantienen esta opinión, si imaginasen una masa hecha de arena en otros aspectos tan grande como la masa de la Tierra, incluyendo en ella todos los mares y las cavidades de la Tierra llenadas hasta una altura igual a la de las montañas más altas estarían muchas veces lejos de reconocer que se pueda expresar ningún número para exceda a la magnitud de la arena así conseguida. Pero intentaré demostraros por medio de puntos geométricos que seréis capaces de seguir, que los números nombrados por mí. . . algunos exceden no sólo al número de la masa de arena

igual en magnitud a la de la Tierra llena de la forma descrita, sino al de la masa igual en magnitud al Universo. ”

El sistema de numeración de Arquímedes consistía en lo siguiente, utilizaba al principio una miríada o 10.000, como unidad de primer orden y obtenía por extensión el número $100.000.000 = (10.000)^2$. Después partiendo de la miríada como magnitud de primer orden llegaba por extensión hasta $100.000.000^2$ que se convierte en la unidad de tercer orden que extendiendo llega hasta $100.000.000^3$, podemos continuar hasta llegar al término 1.000.000.000-ésimo que termina en el número $100.000.000^{100.000.000}$ al que llamaremos N. Arquímedes utilizaba este número N como el último término del primer período. Utilizaba este N como unidad del segundo período el cual se extendía hasta 100.000.000 N para el primer orden, el segundo orden de este periodo termina con el número $100.000.000^2$ y el 100.000.000-ésimo orden del segundo periodo termina con $100.000.000^{100.000.000}$ N ó lo que es lo mismo N^2. Así de esta manera se puede llegar hasta el 100.000.000-ésimo período o lo que es lo mismo N elevado a 10^8. Se puede comprobar que la magnitud de este sistema de numeración es enorme, el último número del primer período se representaría como un 1 seguido de 800.000.000 ceros. Una establecido este sistema y con una evaluación que hizo Arquímedes sobre el universo y la de un gramo de arena, afirmó que el número de granos de arena que había en el universo era menor que 10^{51}.
Arquímedes, también prueba que el diámetro del sol es más grande que el lado de un kilógono[2], o figura con mil lados iguales, inscrito en un gran círculo del universo.

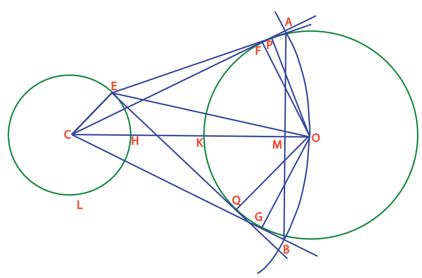

Figura 1.7 El diámetro del sol es más grande que el lado de un kilógono

[2]Kilógono proviene del inglés chiliagon, y este del griego χιλαγωνον, es decir, un polígono de 1000 lados.

1.5.9 De los conoides y esferoides

Conoides: son sólidos producto de revolucionar una parábola o hipérbola sobre sus ejes.
Esferoides: son producto de revolucionar una elipse y son gruesos o delgados, de acuerdo a si se revolucionan sobre el eje mayor o menor.
Se considera una continuación del trabajo sobre la esfera y el cilindro, Arquímedes estudia las propiedades y comparaciones de otros sólidos que trascienden la geometría elemental, son los obtenidos por la rotación alrededor de uno de sus ejes, de las tres cónicas, el elipsoide de revolución, paraboloide de revolución e hiperboloide (de dos hojas)de revolución.

1.5.10 De las espirales

Es un estudio monográfico de una curva plana, hoy llamada espiral de Arquímedes, que se genera por una simple combinación de movimientos de rotación y traslación. Aunque se trata de una línea, este escrito tiene las mismas características y dificultades de los anteriores.

1.5.11 Cuadratura de la parábola

Ofrece el primer ejemplo de cuadratura, es decir, de determinación de un polígono equivalente, de una figura mixtilínea: el segmento de parábola, en este escrito aparecen consideraciones no estrictamente matemáticas (en el sentido actual) pues además de una demostración geométrica del resultado principal, éste se obtiene por un procedimiento *mecánico*, utilizando la teoría de la palanca y de los centros de gravedad, que Arquímedes había estudiado en otros escritos.

1.5.12 Stomachion

Es un juego geométrico, una especie de puzzle, formado por una serie de piezas poligonales que completan un rectágulo, se le denomino *loculus Archimedium* por algunos gramáticos latinos.

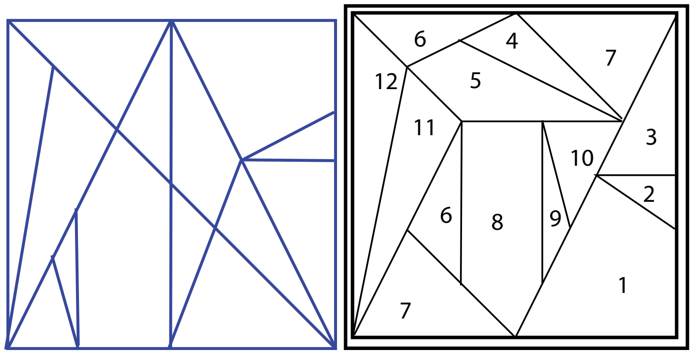

Figura 1.8 Stomachion

1.5.13 El Libro de Lemas

Es una reunión de proposiciones de geometría plana, sin conexión entre si, que sólo se conoce a través de una versión en árabe, y se le atribuye a Arquímedes. Es probable que sólo algunas de sus proposiciones sean realmente de Arquímedes.

Entre las proposiciones que forman este escrito, se encuentran las siguientes:

Proposición 1: *Si dos circunferencias se intersecan en un punto A, y sea BD, EF los diámetros de estas, además estos son paralelos, entonces ADF es una recta.*

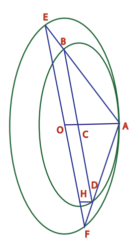

Figura 1.9 Proposición 1

Proposición 2: *Sea AB el diámetro de una semicírculo y considere las dos rectas tangentes tal que una pase por B y la otra por D, sea T el punto de intersección de estas. Si se traza DE perpendicular a AB, además AT, DE se intersecan en F, entonces $DF = FE$*

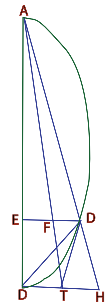

Figura 1.10 Proposición 2

Proposición 3: *Sea P un punto cualquiera de un segmento de círculo de base AB, PN es perpendicular a AB. Se elige un punto D que pertenezca a AB tal que $AN = ND$. Ahora si el arco PQ es congruente con el arco PA, y si se traza BQ, entonces BQ y BD serán iguales.*

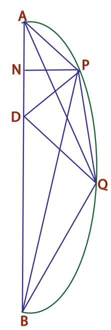

Figura 1.11 Proposición 3

Proposición 4: *Si AB es el diámetro de un semicírculo y N un punto cualquiera en AB, si se trazan dos semicírculos en el interior del primero, cuyos diámetros son AN y BN respectivamente, entonces el área de la figura comprendida por los tres semicírculos (a lo que Arquímedes llamó: αρβηλος, cuchillo o navaja de zapatero) es igual al área del círculo de diámetro PN, donde PN es perpendicular a AB y corta al semicírculo original en P*

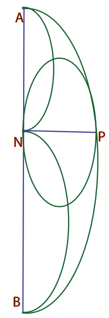

Figura 1.12 Proposición 4: Cuchillo de zapatero

Proposición 5: *Sea AB el diámetro de un semicírculo, C un punto cualquiera en AB, y sea CD un segmento perpendicular a este. Si se trazan dos semicírculos en el interior del primero cuyos diámetros son AC, CB. Entonces si se dibujan dos círculos que intersequen a CD en lados opuestos, y a la vez cada uno de estos intersequen a dos de los semicírculos, se obtiene que los círculos dibujados son iguales*

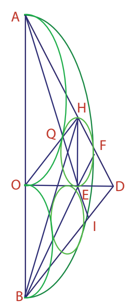

Figura 1.13 Proposición 5

Proposición 6: *Sea AB el diámetro de un semicírculo, C es un punto en este, tal que* $AC = \frac{3}{2}CB$ *(o cualquier otra proporción), si se traza dos semicírculos en el interior del primero, cuyos diámetros son AC y CB, suponga que se dibuja un círculo que interseca a* *los tres semicírculos. Si GH es el diámetro de este círculo, entonces se encuentra alguna relación entre GH y AB.*

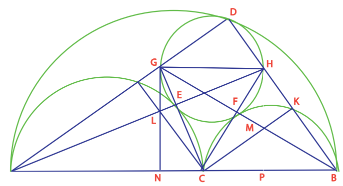

Figura 1.14 Proposición 6

Proposición 7: *Si se circunscribe e inscribe círculos en un cuadrado, el círculo circunscrito es el doble del círculo inscrito.*
Proposición 8: *Si AB es una cuerda cualquiera de un círculo de centro O, y si AB se prolonga hasta C tal que BC es igual al radio, y CO interseca al círculo en D y su prolongación corta al círculo en E, el arco AE es igual a tres veces el arco BD.*

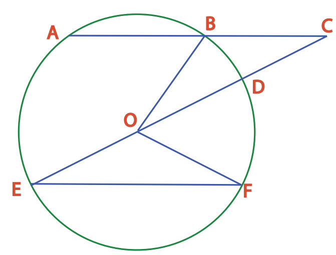

Figura 1.15 Proposición 8

Proposición 9: *Si AB y CD son dos cuerdas de un círculo, tal que no pasen por el centro de este y se interseque perpendicularmente, entonces (arc AD)+(arc CD)=(arc AC)+(arc* EF*).*

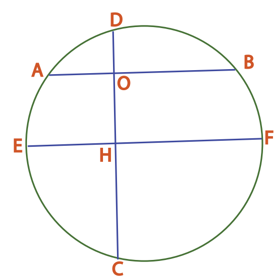

Figura 1.16 Proposición 9

Proposición 10: *Suponga que* TA *y* TB *son dos tangentes a un círculo, y* TC *una secante. Sea BD una cuerda paralela a* TC*, además AD interseca a* TC *en* E *. Entonces si se traza* EH *perpendicular a BD, este lo biseca en* H.

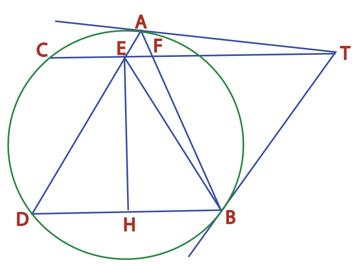

Figura 1.17 Proposición 10

Proposición 11: *Si dos cuerdas de un círculo AB y CD, se intersecan formando ángulos rectos, en un punto O, que no sea el centro del círculo, entonces* $AO^2+BO^2+CO^2+DO^2 = (diámetro)^2$.

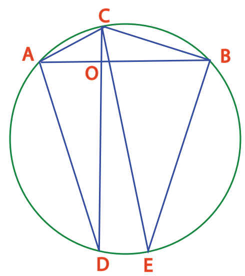

Figura 1.18 Proposición 11

Proposición 12: *Si AB es el diámetro de un semicírculo, y TP, TQ son tangentes a este desde cualquier punto T, y si AQ, BP se intersecan en R, entonces RT es perpendicular a AB.*

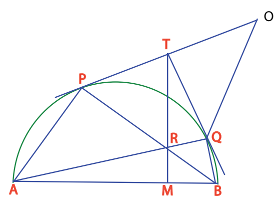

Figura 1.19 Proposición 12

Proposición 13: *Si en un círculo el diámetro AB se interseca con una cuerda cualquiera CD, que sea un diámetro, en el punto E, y si AM, BN son perpendiculares a CD, entonces $CN = DM$.*

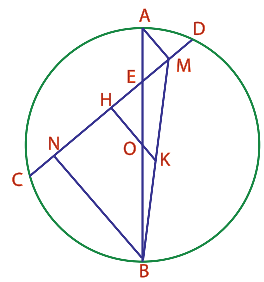

Figura 1.20 Proposición 13

Proposición 14: *Sea ACB un semicírculo de diámetro AB, además AD y BE medidas conmensurable iguales, a lo largo de AB desde A hasta B respectivamente. Si hacia el lado de C se trazan los semicírculos de diámetros AD y BE, al lado opuesto de este se traza el semicírculo de diámetro DE. Considere la perpendicular a AB que pasa por O, que es el centro del primer semicírculo, además interseca al semicírculo opuesto a C, en F.*

Entonces el área de la figura formada por los todos semicírculos (a la que Arquímedes llamó Salinon) es igual al área del círculo de diámetro CF.

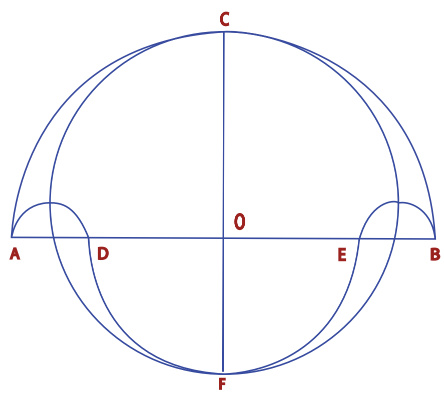

Figura 1.21 Salinon

Proposición 15: *Sea AB el diámetro de un círculo, AC el lado de un pentágono regular inscrito en este, D el punto medio del arco AC. La intersección de las prolongaciones de BA y CD es el punto E, además DB, AC se intersecan en F y se traza FM perpendicular a AB, entonces EM =(radio del círculo).*

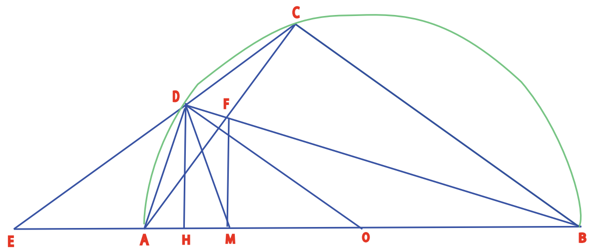

Figura 1.22 Proposición 15

1.5.14 El problema de los bueyes

Este es un problema difícil en Análisis de indeterminadas. Este requiere encontrar el número de toros y vacas de cada uno de cuatro colores, o encontrar ocho cantidades desconocidas. La primera parte del problema está conectada con variables de siete ecuaciones simples; y la segunda parte se le suman dos condiciones más a las cuales las variables pueden ser sujetas. Si W, w son el número de toros y vacas blancas respectivamente y (X, x), (Y, y), (Z, z) representan el número de los otros tres colores, tenemos las primeras ecuaciones (véase [10], o [8]):

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) X + Y, \tag{1.1}$$

$$X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) Z + Y, \tag{1.2}$$

$$Z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + Y, \tag{1.3}$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (X + x), \tag{1.4}$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(Z + z), \tag{1.5}$$

$$z = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Y + y), \tag{1.6}$$

$$y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(W + w) \tag{1.7}$$

Luego, como segunda condición, es requerido que

$$W + X = \text{un número cuadrado} \tag{1.8}$$

$$Y + Z = \text{un número triangular} \tag{1.9}$$

La solución general de las primeras siete ecuaciones es

$$\begin{aligned}
W &= 10366482n,\\
X &= 7460514n,\\
Y &= 4149387n,\\
Z &= 7358060n,\\
w &= 7206360n,\\
x &= 4893246n,\\
y &= 5439213n,\\
z &= 3515820n.
\end{aligned}$$

La segunda parte del problema, para encontrar un valor de n tal que $W + X = \alpha$ sea un número cuadrado, si consideramos $n = 4456749\xi^2$, donde ξ es un entero, se satisface la hipótesis. Para encontrar un número triangular $Y + Z$, es decir, un número de la forma $\frac{1}{2}q(q+1)$, hay la siguiente ecuación de Pell:

$$t^2 - 4729494u^2 = 1$$

la cual, solo una de las ocho variables tiene más de 206500 dígitos.
Este problema de Arquímedes, al que se le conoce como el problema de los bueyes del sol, está relacionado con los números triangulares y cuadrados.[3]

Desde muy pronto los matemáticos reconocieron que la manada más pequeña que cumple las siete primeras condiciones contiene 50389082 animales. Las dos últimas condiciones hacen el problema mucho más difícil. En 1965, un grupo canadiense encontró la primera solución completa con ayuda de un ordenador.
Este problema ha servido para poner a prueba superordenadores, como el $CRAY-1$ de un laboratorio de California. La ventaja de este tipo de problemas es que las soluciones pueden comprobarse fácilmente sustituyendo directamente en las ecuaciones.

1.6 Trabajos perdidos de Arquímedes

[3]Véase [1], el problema dice lo siguiente:

> "Calcula, oh amigo, los bueyes del sol, dándole a tu mente entretenimiento, si tienes parte de la sabiduría. Calcula el número que alguna vez pastó en la isla siciliana de Trinacria y estaban divididos de acuerdo a su color en cuatro manadas, una blanca, una negra, una amarilla y otra moteada. Los toros eran mayoría en cada una de ellas.
>
> Además:
> Toros blancos $=$ toros amarillos $+(1/2+1/3)$ toros negros, toros negros $=$ toros amarillos $+(1/4+1/5)$ toros moteados, toros moteados $=$ toros amarillos $+(1/6+1/7)$ toros blancos, vacas blancas $=(1/3+1/4)$ manada negra, vacas negras $=(1/4+1/5)$ manada moteada, vacas moteadas $=(1/5+1/6)$ manada amarilla, vacas amarillas $=(1/6+1/7)$ manada blanca.
>
> Si tú, oh amigo, puedes dar el número de toros y vacas en cada manada, tú eres ni sabio ni torpe con los números, pero aún no puede contársete entre los sabios. Considera sin embargo las siguientes relaciones entre los toros del sol:
> Toros blancos $+$ toros negros $=$ número cuadrado, toros moteados $+$ toros amarillos $=$ número triangular.
>
> Cuando hayas entonces calculado los totales de la manada, oh amigo, ve como conquistador, y descansa seguro, que te has probado hábil en la ciencia de los números. "

Según Heath, estos son algunos de los trabajos perdidos de Arquímedes:

1. Una investigación relativa a *poliedros*.
2. Un libro de contenidos aritméticos llamado *Principles* ($\alpha\rho\chi\alpha\iota$).
3. *Sobre balanzas*$\rightarrow$ $\pi\epsilon\rho\iota$ $\zeta\upsilon\gamma\omega\nu$.
4. *Sobre centros de Gravedad*$\rightarrow$ $\kappa\epsilon\nu\tau\rho o\beta\alpha\rho\iota\kappa\alpha$.
5. *Sobre óptica*$\rightarrow$ $\kappa\alpha\tau o\pi\tau\rho\iota\kappa\alpha$
6. *Sobre hacer esferas*$\rightarrow$ $\pi\epsilon\rho\iota$ $\sigma\phi\alpha\iota\rho o\pi o\iota\alpha\varsigma$.
7. Calendario.

1.7 Arquímedes y sus principales influencias en la matemática moderna

1.7.1 Trisección de un ángulo

A Arquímedes se le atribuye la trisección de un ángulo (véase [5]) mediante la siguiente construcción:

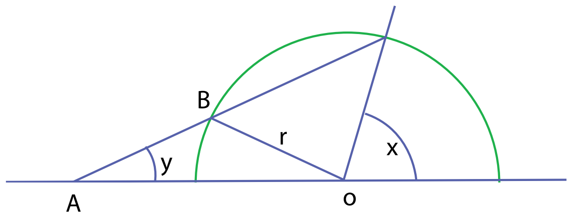

Figura 1.23 Trisección de un ángulo de Arquímedes

1.7.2 Cálculo de π

Arquímedes fue el primero en dar un método para calcular π con el grado de aproximación deseado.
Esto es basado en el hecho de que el perímetro de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia es más pequeño que la circunferencia de un círculo. De igual manera, el perímetro de un polígono similar circunscrito al círculo es mayor que la circunferencia. Haciendo n suficientemente grande, los dos perímetros se aproximarán a la circunferencia arbitrariamente cercana, una por debajo y otra por encima.
Arquímedes inicio con un hexágono y progresivamente doblando el número de lados, llegó a un polígono de 96 lados donde obtuvo,

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

1.7.3 Reductio ad absurdum

Arquímedes usó . . . *una estrategia lógica elaborada llamada doble reductio ad absurdum* (véase [6]).

> "*Cuando Arquímedes se acerca a un tema mucho más complicado del área del círculo, utiliza un ataque indirecto. Sabe que para cualquier cantidad A o B, solo es cierto*

uno de los siguientes casos: $A > B$, $A = B$, $A < B$. Como quiere mostrar que $A = B$, Arquímedes, supone primero que $A > B$ y a partir de allí deriva una contradicción lógica, con lo que elimina esa posibilidad. Seguidamente, supone que $A < B$, lo cual lo lleva de nuevo a una contradicción. Una vez eliminado estas posibilidades, solo queda una posibilidad, que A y B son iguales (Véase [6], pp. 129). ”

1.7.4 El Postulado de Arquímedes

En [13], se enuncia el postulado o axioma de Arquímedes de la siguiente manera

> “Cualquier cantidad, por más pequeña que sea, puede hacerse tan grande como se quiera multiplicándose por un número suficientemente grande.
> Esto se puede reformular de la siguiente manera:
> Dadas dos magnitudes diferentes α y β (con $\beta < \alpha$) existe entonces:
>
> - un número n tal que $n\beta > \alpha$. (Esté definición se encuentra en el Libro V de los *Elementos* de Euclides).
> - un número n tal que $n(\alpha - \beta) > \gamma$, donde γ es cualquier magnitud de la misma clase. (Este es el llamado *axioma de Arquímedes* y se encuentra en su trabajo *Sobre la esfera y el cilindro*, Libro I).
>
> ”

Este postulado se le atribuye a Euclides y a Eudoxio.

1.7.5 Algunos problemas arquimedianos

- Encontrar el área de una zona esférica de altura h y radio r.
- Encontrar el centroide de un segmento esférico.
- Encontrar el volumen de una cuña cilíndrica, fuera de un cilindro circular recto por un plano que pasa entre el diámetro de la base del cilindro.
- Encontrar el volumen común de dos cilindros circulares rectos de igual radio y teniendo sus ejes intersecando perpendicularmente.

1.7.6 Fórmula para calcular el área de un triángulo

Según [7], un escritor árabe le atribuye a Arquímedes el descubrimiento de la célebre fórmula:

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

para el área de un triángulo en término de sus lados, fórmula que también se le atribuye a Heron de Alejandría.
Otro problema también atribuido a Arquímedes es la de encontrar las perpendiculares de un triángulo cuando la medida de los lados son dados. Véase también [10].

1.7.7 Volumen de la Esfera

Vamos a calcular el volumen de la esfera usando varios métodos, el primero de ellos se basa en un método usado por Arquímedes usando infinitesimales (véase [12]), luego, calcularemos dicho volumen utilizando integración doble y triple, con coordenadas polares y coordenadas esféricas respectivamente, los cual nos refleja, la importancia que han tenido los trabajos de Arquímedes en la matemática moderna.

1.7.8 Infinitesimales

Considere una esfera de radio R, sea V un hemisferio, o bien, la mitad de la esfera. Dividimos el hemisferio, mediante planos paralelos a la tapa de la semiesfera, en n porciones cada una de grosor $\frac{R}{n}$. Cada una de estas capas serán aproximadas como cilindros.
Sea r_k el radio del cilindro en la $k-$ésima capa, entonces su volumen se aproxima

$$V_k \sim \pi (r_k)^2 \cdot \frac{R}{n}$$

Por Pitágoras

$$r_k = R^2 - + \frac{k^2 R^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow V_k \sim \pi \left(R^2 - \frac{k^2 R^2}{n^2} \right) \cdot \frac{R}{n}$$

Entonces el volumen de hemisferio se aproxima

$$V^* = \sum V_k \sim \pi R^3 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \right)$$

$$\sim \pi R^3 \left(1 - \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \sim \frac{\pi R^3}{6} \left(6 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

Si $n \to \infty$, $V^* \sim \frac{\pi R^3}{6}(6-4) = \frac{2\pi R^3}{3}$, entonces, el volumen de la esfera es $\dfrac{4\pi R^3}{3}$

1.7.9 Coordenadas Polares

Considere la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{a^2 - r^2}$$

El volumen de la esfera es

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz r dr d\theta = 2\int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \int_{a^2}^0 \sqrt{u} du d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{a^2}^0 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2a^3}{3} d\theta$$

$$= \frac{2a^3 \cdot 2\pi}{3} = \frac{4\pi a^3}{3}$$

1.7.10 Coordenadas esféricas

El volumen de la misma esfera se representa como

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot r^2 \cos\theta d\theta dr d\phi$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2 \sin\theta \,|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2(1--1)drd\phi \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2 drd\phi = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} r^3 \,|_0^a \,d\phi = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} a^3 d\phi \\
&= \frac{2a^3\cdot 2\pi}{3} = \frac{4a^3\pi}{3}
\end{aligned}
$$

1.8 Estudio de una obra de Arquímedes: El Método

Para la elaboración de este sección se toma como referencia a [8], que realiza una de las fidedignas traducciones de los trabajos de Arquímedes.
Esta es la obra más estudiada de Arquímedes puesto que nos ha llegado con mayor exactitud. El texto fue descubierto en 1906 por Heiberg. Tuvo noticias del hallazgo en el convento del Santo Sepulcro de Constantinopla de un palimpsesto de contenido matemático.
Examinando el texto con técnicas fotográficas, Heiberg descubrió que en el pergamino había escritas obras de Arquímedes que habían sido copiadas alrededor del siglo X. En sus 185 páginas estaban Sobre la esfera y el cilindro, Sobre las espirales, La medida del círculo, Sobre el equilibrio de los planos y Sobre los cuerpos flotantes además de la única copia de El método.
Arquímedes se propone a dar a conocer una vía de investigación que no sólo le permite hacerse una idea previa de la solución de ciertos problemas matemáticos, sino que además, sugiere un planteamiento plausible y facilita el acceso de la demostración.
En este libro, Arquímedes nos dice como descubrió sus teoremas de cuadratura y cubatura, a saber por el uso de la mecánica. Al mismo tiempo, es muy cuidadosa en insistir en la diferencia entre lo que puede sugerir la veracidad de un teorema y la rigurosa demostración de los mismos usando métodos geométricos ortodoxos.

1.9 El Método de Arquímedes tratando de problemas mecánicos a Eratóstenes

Se dedica a la descripción y aplicación de un método geométrico-mecánico. Es una larga carta dirigida a Eratóstenes. En *El Método*, Arquímedes revela aspectos o partes de los procesos mentales consistentes en un *método mecánico*, que él utilizó en sus descubrimientos y que no aparecía en sus escritos científicos (véase [1]).
En la búsqueda de las áreas de los segmentos parabólicos, el volumen de segmentos esféricos y otros sólidos de revolución, Arquímedes usó un proceso mecánico, en el cual consideraba el peso de los elementos infinitesimales, el cual el llamaba líneas rectas o área de planos, pero los cuales son realmente barras infinitamente delgadas o láminas.
Pareciera que, en sus grandes investigaciones, el modo de proceder de Arquímedes fue, iniciar con mecánica (centro de masa de superficies y sólidos) y por su método mecánico infinitesimal descubrir nuevos resultados, los cuales luego él dedujo y publicó con pruebas muy rigurosas.
Según [1], Arquímedes en El Método cuando se refería al contenido de este, afirma que:

> "... , como ya he dicho, un estudioso y excelente maestro de filosofía y que sabes apreciar, llegado el caso, las investigaciones matemáticas que se te presentan, he pensado en exponerte e ilustrar en este mismo libro la naturaleza particular de un método que te permitirá eventualmente adquirir, con cierta facilidad, proposiciones matemáticas mediante consideraciones mecánicas. Por lo demás estoy convencido de que este método mostrará también su utilidad en la demostración misma de las proposiciones, pues algunas de ellas que se tornaron para mí evidentes primero mediante este método mecánico, las demostré de inmediato por la geometría, pues la investigación mediante este método no comporta una verdadera demostración. Pues sin duda es más fácil encontrar la demostración después de haber adquirido con este método un cierto conocimiento del asunto, que buscarla sin tener conocimiento previo alguno ... "

Todas las proposiciones de el Método corresponden a propiedades métricas: áreas, volúmenes, centros de gravedad, cuya demostración exige la doble reducción al absurdo, involucra el método de exhaución, en conexión con el *postulado de Arquímedes.*
El método mecánico de Arquímedes es una combinación tan audaz como genial, de consideraciones geométricas y mecánicas, que en su esencia encierra procedimientos de análisis infinitesimal, lo que muestra que mediante ese método Arquímedes logre resultados, que hoy se obtienen con el cálculo integral.
Según [4], Arquímedes conocía $\int x^3 dx$.

1.9.1 Método del equilibrium de Arquímedes

Siguiendo la crítica de [7], se considera que el método de exhausción es riguroso, pero es un método estéril. Es decir, una vez que conocemos la fórmula, el método de Exhaución se vuelve una herramienta elegante para establecer un resultado, pero el método no nos da una idea de cómo llegar a él. El método de Exhaución, es en este sentido como la inducción matemática. El modo como Arquímedes llegó a sus principales resultados es expuesto en “El Método", este es el llamado **método del equilibrium**, véase [7] páginas 324 en adelante.

La idea fundamental de este método es el siguiente: para encontrar el área o volumen de un sólido requerido, se debe trazar una serie de planos paralelos que corten el sólido en capas muy delgadas, éstas se separan y (mentalmente) se sujetan en el extremo final de una palanca, tal que la figura contenida se ubique en equilibrio sobre éste, y así localizar su centro de masa.

En la ilustración, se muestra la utilización del método para determinarla fórmula para el volumen de una esfera.

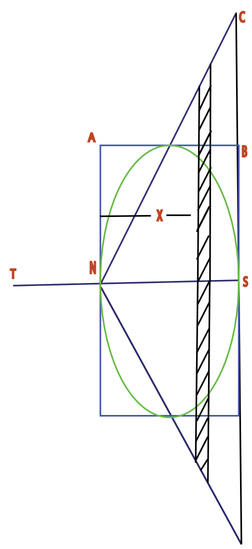

Figura 1.24 Método del Equilibrium de Arquímedes

Sea r el radio de una esfera. Puesta la esfera con su diámetro polar a lo largo del eje horizontal x con el polo norte N en origen. Construya el cilindro y el cono de revolución obtenidas por rotación del rectángulo $NABS$ y el triángulo NCS sobre el eje x. Ahora se le corta a los tres sólidos capas delgadas de manera vertical (asumiendo que es un cilindro delgado) a la distancia x de N y de grosor Δx. El volumen de estas capas es aproximadamente,

$$\text{esfera} = \pi x(2r-x)\Delta x$$

$$\text{cilindro} = \pi r^2 \Delta x$$

$$\text{cono} = \pi x^2 \Delta x$$

Sujetemos a T las capas de la esfera y el cono, donde $TN = 2r$. Su momento combinado[4] sobre N es

$$\left[\pi x(2r-x)\Delta x + \pi x^2 \Delta x\right] 2r = 4\pi r^2 \Delta x$$

Esto es cuatro veces el momento de la capa cortada del cilindro cuando esta capa es retirada. Sumando un gran número de estas capas juntas, encontramos

$$2r\,[\text{volumen de la esfera} + \text{volumen del cono}] = 4r\,[\text{volumen del cilindro}]$$

o

$$2r[\text{volumen de la esfera} + \frac{8\pi r^3}{3} = 8\pi r^4]$$

o

$$\text{volumen de la esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Este fue el método como Arquímedes descubrió la fórmula para el volumen de la esfera. Su conciencia matemática no le permitía aceptar su construcción como una prueba y él siempre aplicaba sus rigurosas pruebas para resultados como este.
La figura 1.25 representa un segmento parabólico que tiene AC como cuerda. CF es tangente a la parábola en C y AF es paralelo al eje de la parábola. OPM es también paralelo al eje de la parábola. K es el punto medio de FA y $HK = KC$. Tome K como un **fulcrum**, puesto OP con su centro en H y se retira la capa OM. Usando el hecho que $\frac{OM}{PO} = \frac{AC}{AO}$ muestra por el método del equilibrio de Arquímedes, que el área del segmento parabólico es una tercera parte del área del triángulo AFC.

[4]Por momento de un volumen sobre un punto entendemos el producto del volumen y la distancia perpendicular desde el punto a la línea vertical pasando por el centroide del volumen.

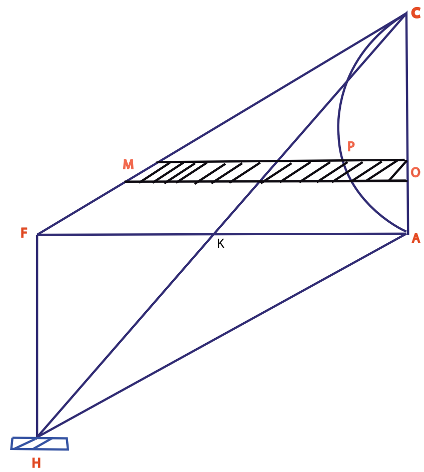

Figura 1.25 Segmento parabólico

La idea expuesta anteriormente revela varias cosas: primero, Arquímedes ya conocía sobre los centro de gravedad, lo cual nos indica que Arquímedes se le adelantó a Pappus y sus teoremas sobre centroides. Segundo, los métodos empleados por Arquímedes de alguna manera nos muestran que éste se adelantó a las ideas básicas del cálculo integral, dado que la aplicación sucesiva de la idea empleada para encontrar el área del segmento parabólico nos da como resultado el valor de la integral.

1.9.2 Importancia de la didáctica de Arquímedes

En el estudio de la evolución del conocimiento matemático a lo largo de la historia, se debe considerar la obra de Arquímedes como prototípica, dadas sus características entre las que podemos destacar:

- Arquímedes desarrolla técnicas de demostración orientadas a la consecución del *rigor*, concepto éste de vital importancia en el desarrollo histórico de la Matemática. En este sentido se puede destacar la maestría de Arquímedes en la aplicación del Método de Exhaución, cuyo objetivo es evitar el uso del *infinito* en las demostraciones, siguiendo la tradición filosófica griega que excluía el uso de este concepto para la adquisición del conocimiento racional, es decir, del conocimiento *verdadero*, debido a la multitud de contradicciones en las que nos hace caer.

- La aplicación del Método de Exhaución presenta un problema: se debe conocer a priori el resultado que se quiere demostrar. En consecuencia es necesario disponer de otros métodos para obtener estos resultados que luego serán demostrados *rigurosamente*, es decir, *sin hacer intervenir el infinito*. Estos métodos suelen ser bastante intuitivos y basados en el conocimiento empírico. Arquímedes descompone áreas en infinitos segmentos que luego *pesa* con su balanza; halla centros de gravedad, donde supone concentrado todo el *peso* de una figura, llegando así a resultados que luego demuestra por el Método de Exhaución.

- La obra de Arquímedes es un conjunto *cerrado* respecto a la construcción del conocimiento matemático: dispone de métodos exploratorios para obtener nuevos resultados y de métodos demostrativos para confirmar la *verdad matemática* de dichos resultados. Esta característica convierte la obra de Arquímedes en una herramienta didáctica única, que debería ser considerada *obligatoria* en la formación de los estudiantes, en particular, en la formación de los futuros matemáticos.

- En el método existe un dualismo entre la vía del descubrimiento y la vía de la demostración. Donde el primero incluye sugerencias heurísticas y razonamientos que hacen verosímil la solución imaginada o propuesta.

1.10 Conclusiones

Se puede ver que en las obras de Arquímedes a una figura entregada a la investigación, que se dedicó a no solo a la geometría, sino también a diversas áreas de la matemática: así por ejemplo, teoría de números.
Es importante resaltar la parte polifacética de Arquímedes, esto refleja en que éste pudo dedicarse a cuestiones tantas teóricas como prácticas.
Dejamos como temas abiertos para investigaciones de carácter histórico lo relacionado con el problema del heptágono, además de los denominados sólidos de Arquímedes y demás, ya que estos trabajos están incompletos y del cual no se puede verificar la veracidad de la atribución a Arquímedes, véase [8].

Bibliografía

[1] Babini, J. (1948). *Arquímedes*. Colección Austral. Espasa-Calpe. Buenos Aires-Argentina.

[2] Beckmann, P. (1971). *A history of* π. St. Martin's Press. New York.

[3] Boyer, C. (1949). *The history of the Calculus*. Dover Publications, Inc. New York.

[4] Cajori, F. (1961). *A History of mathematics*. Macmillan Company. New York.

[5] Courant, R.; Robbins, H. (1996). *What is mathematics?*. Oxford University Press. Oxford.

[6] Dunham, W. (1993). *Viaje a través de los genios*. Ediciones Pirámide. Madrid-España.

[7] Eves, H. (1964). *An introduction to the history of mathematics*. Holt Rinehart and Winston, Inc. USA.

[8] Heath, T.L. *The Works of Archimedes*. Dover Publications, Inc. New York.

[9] Heath, T.L. (1931). *A manual of Greek Mathematics*. Dover Publications, Inc. New York.

[10] Heath, T.L. (1921). *A history of Greek Mathematics*. Volumen II. Dover Publications, Inc. New York.

[11] Hoffman, P. (1988). *Archimedes's Revenge*. Fawcett Crest. New York.

[12] Natanson, I.P. (1988). *La suma de las cantidades infinitamente pequeñas*. Editorial Limusa. México.

[13] Ruíz, A. (2003). *Historia y Filosofía de las Matemáticas*. EUNED. San José-Costa Rica.

[14] Struik, D. (1988). *A conscise history of mathematics*. Dover Publications, Inc. New York.