Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 9, N^o 2. 2009

Ternas pitagóricas: métodos para generarlas y algunas curiosidades

Juan José Fallas.
jfallas@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de de Costa Rica

Resumen

Este artículo presenta cuatro métodos para generar ternas pitagóricas. Entre ellos, se analizará el método de Diofanto y el método de las dos fracciones. Además, se exponen cuatro curiosidades sobre este interesante tema.

Palabras claves: métodos para generar ternas pitagóricas.

1.1 Introducción

Este artículo muestra algunos de los métodos que permiten generar ternas pitagóricas, además de algunos resultados interesantes sobre este tema. Los métodos que se abordarán son: el de Diofanto, el de las dos fracciones y los números de Fibonacci.

A una terna de números naturales (a,b,c) que satisface la ecuación $a^2+b^2=c^2$ se le llama una terna pitagórica. Al correspondiente triángulo rectángulo de catetos con medidas a y b e hipotenusa con medida c se le llama triángulo pitagórico.

El estudio de las ternas pitagóricas comenzó antes, incluso, de la época de Pitágoras (Siglo VI a.C.). Se han encontrado tablas babilónicas que contienen algunas de estas ternas, lo cual sugiere que los Babilonios tenían algún método para generarlas. Inclusive, existe evidencia de su uso en el antiguo Egipto para generar ángulos rectos, los cuales eran utilizados en pequeñas construcciones.

Hoy en día, a pesar de que las ternas pitagóricas no tienen mucha importancia para generar resultados aplicables a la vida cotidiana, su estudio se justifica por la variedad de proposiciones matemáticas que existen sobre ellas. Es realmente sorprendente la cantidad y la belleza matemática de estas proposiciones, respecto a esto, la Brown University (2008) menciona:

> Hay una buena razón para estudiar las ternas pitagóricas, y es la misma razón por la cual vale la pena estudiar el arte de Rembrandt y la música de Beethoven. Hay una belleza en la forma en que los números interactúan con otros, de la misma forma en que hay algo bello en la composición de una pintura o de una sinfonía. Para apreciar esta belleza uno tiene que estar dispuesto a gastar cierta cantidad de energía mental, pero al final vale la pena el esfuerzo.

1.2 El método de Diofanto

El problema número ocho del libro II de la *Arithmetica* de Diofanto plantea: *descomponer un cuadrado en dos cuadrados*. Como lo indica Benito (2004), Diofanto resuelve este problema siguiendo un razonamiento semejante al siguiente:

Suponga que se quiere descomponer el número 16 en dos cuadrados. Siendo x^2 el primer número, entonces el segundo debe ser $16-x^2$, el cual también debe ser un cuadrado. Es decir, $16-x^2=y^2$. Luego, Diofanto identifica al número y^2 con una expresión del tipo $\left(mx-\sqrt{16}\right)^2$ con m un número racional mayor que uno (el cuadrado de un conjunto formado por los "múltiplos" de x disminuidos en la raíz de 16). Por lo tanto:

$$y^2 = 16 - x^2 = \left(mx - \sqrt{16}\right)^2$$

$$\Longrightarrow 16 - x^2 = (mx - 4)^2$$

De esta igualdad se tiene que:

$$16 - x^2 = m^2x^2 - 8mx + 16 \Longrightarrow 8mx = m^2x^2 + x^2 \Longrightarrow 8mx = x^2\left(m^2 + 1\right)$$

Como $x > 0$ entonces se tiene:

$$\frac{8m}{m^2+1} = x \Longrightarrow y^2 = 16 - \left(\frac{8m}{m^2+1}\right)^2 \Longrightarrow y^2 = \frac{16\left(m^2-1\right)^2}{(m^2+1)^2}$$

Como $y > 0$ y $m > 1$ se tiene:

$$y = \frac{4\left(m^2-1\right)}{m^2+1}$$

Resumiendo, el número 16 se puede descomponer como:

$$16 = x^2 + y^2 \Longrightarrow 16 = \left(\frac{8m}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{4\left(m^2-1\right)}{m^2+1}\right)^2$$

por ejemplo, para $m = 2$ se tiene:

$$16 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

para $m = 3$:

$$16 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2$$

En general, si se quiere descomponer el cuadrado n^2, $n \in \mathbb{N}$, como suma de dos cuadrados: $n^2 = x^2 + y^2$, se sigue el procedimiento anterior:

$$
\begin{aligned}
& y^2 = n^2 - x^2 = \left(mx - \sqrt{n^2}\right)^2 \\
& \Longrightarrow n^2 - x^2 = (mx - n)^2 \\
& \Longrightarrow n^2 - x^2 = m^2x^2 - 2mnx + n^2 \\
& \Longrightarrow 2mnx = x^2\left(m^2 + 1\right) \\
& \Longrightarrow x = \frac{2mn}{m^2+1}, \ \text{ pues } x > 0.
\end{aligned}
$$

Luego, como $y^2 = n^2 - x^2$ entonces:

$$y^2 = n^2 - \left(\frac{2mn}{m^2+1}\right)^2 = \frac{n^2\left(m^2-1\right)^2}{\left(m^2+1\right)^2} \Longrightarrow y = \frac{n\left(m^2-1\right)}{m^2+1} \ \text{ pues } m > 1 \text{ y } n > 0.$$

Es decir, los números $x = \frac{2mn}{m^2+1}$ y $y = \frac{n\left(m^2-1\right)}{m^2+1}$ satisfacen que:

$$n^2 = x^2 + y^2$$

Por lo tanto, esto genera la terna:

$$\left(\frac{2mn}{m^2+1}, \frac{n\left(m^2-1\right)}{m^2+1}, n\right) \text{ con } m \text{ un número racional mayor que uno y } n \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, se tiene el inconveniente que los números x y y no son enteros para infinitos valores de m. Para generar ternas pitagóricas, se necesita que la terna esté compuesta por enteros positivos. Para resolver este problema se analiza la igualdad:

$$n^2 = \left(\frac{2mn}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{n\left(m^2-1\right)}{m^2+1}\right)^2$$

Si m es entero entonces basta multiplicar por $\frac{\left(m^2+1\right)^2}{n^2}$ a ambos lados de la igualdad anterior, lo cual genera:

$$\left(m^2+1\right)^2=(2m)^2+\left(m^2-1\right)^2 \tag{1.1}$$

Así, se tiene la terna pitagórica $\left(2m, m^2-1, m^2+1\right)$, para m entero positivo.

En caso que m sea racional no entero entonces $m=\frac{p}{q},\ q\neq 0$. Luego,

$$\left(m^2+1\right)^2=(2m)^2+\left(m^2-1\right)^2 \Longrightarrow \left(\left(\frac{p}{q}\right)^2+1\right)^2=\left(2\cdot\frac{p}{q}\right)^2+\left(\left(\frac{p}{q}\right)^2-1\right)^2$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{p^2+q^2}{q^2}\right)^2=\left(\frac{2p}{q}\right)^2+\left(\frac{p^2-q^2}{q^2}\right)^2$$

Si se multiplica a ambos de la igualdad anterior por q^4 se tiene:

$$\left(p^2+q^2\right)^2=(2pq)^2+\left(p^2-q^2\right)^2$$

Así, se tiene la terna pitagórica $\left(2pq, p^2-q^2, p^2+q^2\right)$, para p y q enteros positivos tales que $p>q$.

EJEMPLO 1.1 Suponga que $p=3$ y $q=2$ entonces los números:

$$p^2-q^2=3^2-2^2=5,\quad 2pq=2\cdot 3\cdot 2=12,\quad p^2+q^2=3^2+2^2=13$$

definen una terna pitagórica. En efecto:

$$5^2+12^2=13^2$$

1.2.1 El método de Diofanto y el círculo unitario

Además de la construcción anterior, existe otra forma de deducir la terna pitagórica:

$$\left(2pq, p^2 - q^2, p^2 + q^2\right), \text{ para } p \text{ y } q \text{ enteros positivos tales que } p > q.$$

Por ejemplo, se puede analizar la relación que existe entre las ternas pitagóricas y un círculo unitario. Recuerde que una terna pitagórica se forma por enteros positivos a, b y c tales que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \Longrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Luego, si se toma $x = \frac{a}{c}$ y $y = \frac{b}{c}$ entonces la ecuación anterior queda expresada como:

$$x^2 + y^2 = 1$$

la cual corresponde a la ecuación cartesiana del círculo unitario. Por lo tanto, es claro que determinar números enteros positivos que generen una terna pitagórica es equivalente a buscar pares ordenados (x, y) de **entradas racionales** tales que $x^2 + y^2 = 1$.

Para ello, se puede considerar una línea recta L que cumpla dos condiciones:

- que contenga un punto P sobre el círculo unitario de entradas racionales.

- que sea de pendiente variable m, con m un número **racional**.

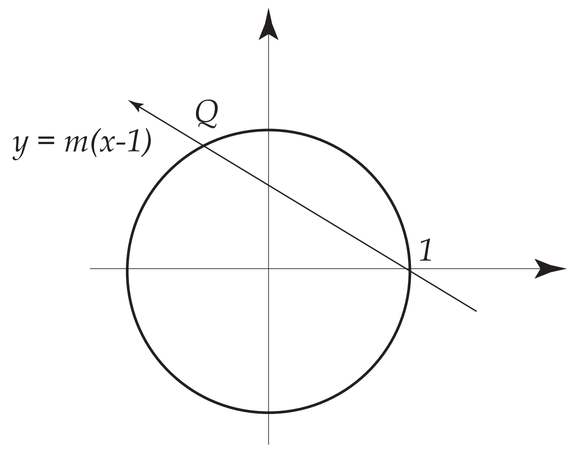

Figura 1.1

A partir de estas dos condiciones, se tiene la certeza que para todo $m \in \mathbb{R}$ la recta L interseca al círculo unitario en otro punto Q diferente a P, el cual, además, tiene entradas racionales. En efecto, esto es lo que se debe encontrar: un punto sobre el círculo unitario de entradas racionales.

Por lo tanto, considere $P(1,0)$ un punto sobre el círculo unitario de entradas racionales y sea L la recta que contiene a P, cuya ecuación viene dada por $y = m(x-1)$. Ahora, se determinará Q, el cual quedará expresado en términos de la pendiente m. Para ello, basta resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = m(x-1) \end{cases}$$

Así, se sustituye el valor de y en la primera ecuación y se realizan los despejes correspondientes:

$$\begin{aligned} & x^2 + m^2(x-1)^2 = 1 \\ & \Longrightarrow x^2 + m^2x^2 - 2m^2x + m^2 = 1 \\ & \Longrightarrow \left(m^2+1\right)x^2 - 2m^2x + m^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación cuadrática de variable x tiene dos soluciones porque la recta L interseca al círculo unitario en dos puntos P y Q. Por lo tanto, $(x-1)$ es un factor del polinomio cuadrático $\left(m^2+1\right)x^2-2m^2x+m^2-1$. Si se realiza la división de polinomios correspondiente, se determina el otro factor y, por ende, la otra solución parametrizada en términos de m.

$$\begin{array}{ccc|c} m^2+1 & -2m^2 & m^2-1 & 1 \\ & m^2+1 & -m^2+1 & \\ \hline m^2+1 & -m^2+1 & 0 & \end{array}$$

Así, el otro factor es $\left(m^2+1\right)x+\left(-m^2+1\right)$, luego, la abscisa del punto Q viene dada por:

$$x=\frac{m^2-1}{m^2+1}$$

sustituyendo en la ecuación $y=m\,(x-1)$ se obtiene:

$$y=m\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}-1\right)=\frac{-2m}{m^2+1}$$

Luego, $\left(\frac{m^2-1}{m^2+1},\frac{-2m}{m^2+1}\right)$ es un punto de entradas racionales que pertenece al círculo unitario. Por lo tanto,

$$\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{-2m}{m^2+1}\right)^2=1$$

multiplicando la ecuación anterior por $\left(m^2+1\right)^2$, se obtiene:

$$\left(m^2-1\right)^2+(2m)^2=\left(m^2+1\right)^2$$

Esta última ecuación ya había sido analizada en (1). Por lo tanto, al tomar $m=\frac{p}{q},\ q\neq 0$, se tiene nuevamente la terna pitagórica $\left(2pq,p^2-q^2,p^2+q^2\right)$ para p y q enteros positivos tales que $p>q$.

EJERCICIOS

1.1 Utilice el razonamiento empleado por Diofanto para descomponer el número 49 como suma de dos cuadrados.

1.2 Realice la construcción con el círculo unitario para generar la terna pitagórica

$$\left(2pq, p^2-q^2, p^2+q^2\right)$$

pero partiendo del punto $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

1.3 El método de las dos fracciones

Considere los números racionales $\frac{m}{n}$ y $\frac{2n}{m}$ con $m, n > 0$, es decir, dos fracciones positivas cualesquiera cuyo producto sea dos. Sume 2 unidades a cada una de las fracciones anteriores:

$$\frac{m}{n}+2=\frac{m+2n}{n} \qquad \frac{2n}{m}+2=2\left(\frac{n}{m}+1\right)=\frac{2\left(n+m\right)}{m}$$

Así, se tienen dos nuevas fracciones:

$$\frac{m+2n}{n} \text{ y } \frac{2\left(n+m\right)}{m}$$

Luego de multiplicar en cruz se obtienen los números $a=(m+2n)\cdot m$ y $b=n\cdot 2\left(n+m\right)$, los cuales satisfacen que a^2+b^2 es un cuadrado perfecto.

Prueba: Para probar que a^2+b^2 es un cuadrado perfecto basta encontrar un número entero c tal que $a^2+b^2=c^2$.

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= [(m+2n)\cdot m]^2+[n\cdot 2\,(n+m)]^2\\
&= m^2\left(m^2+4mn+4n^2\right)+4n^2\left(n^2+2mn+m^2\right)\\
&= m^4+4m^3n+4m^2n^2+4n^4+8mn^3+4m^2n^2\\
&= \left(m^2\right)^2+(2mn)^2+\left(2n^2\right)^2+2\cdot m^2\cdot 2mn+2\cdot m^2\cdot 2n^2+2\cdot 2mn\cdot 2n^2
\end{aligned}
$$

En esta última expresión si se hace $x=m^2,\ y=2mn$ y $z=2n^2$ se tiene:

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

que corresponde al cuadrado del trinomio $x+y+z$. Por lo tanto,

$$\left(m^2\right)^2+(2mn)^2+\left(2n^2\right)^2+2\cdot m^2\cdot 2mn+2\cdot m^2\cdot 2n^2+2\cdot 2mn\cdot 2n^2=\left(m^2+2mn+2n^2\right)^2$$

Así,

$$a^2+b^2=\left(m^2+2mn+2n^2\right)^2$$

Note que $c>0$. Luego, basta tomar $c=m^2+2mn+2n^2$.

En resumen, el método de las dos fracciones afirma que los números:

$$a=(m+2n)\cdot m,\ b=n\cdot 2\,(n+m)\ \text{ y } c=m^2+2mn+2n^2$$

con m y n enteros positivos, forman una terna pitagórica.

EJEMPLO 1.2 Considere las fracciones $\frac{5}{6}$ y $\frac{12}{5}$ cuyo producto es dos. Sume 2 unidades a las fracciones anteriores:

$$\frac{5}{6}+2=\frac{17}{6} \qquad \frac{12}{5}+2=\frac{22}{5}$$

Luego, multiplique en cruz las fracciones obtenidas para generar los valores de a y b.

$$a=17\cdot 5=85 \qquad b=6\cdot 22=132$$

Además,

$$85^2+132^2=24649=157^2$$

Así, se genera la terna pitagórica $85,\ 132,\ 157$.

Como se deduce del *método de las dos fracciones,* inclusive se pueden emplear fracciones no canónicas. Por ejemplo, a partir de las fracciones $\frac{4}{2}$ y $\frac{10}{10}$, cuyo producto es 2, se genera la terna pitagórica $80,\ 60,\ 100$, la cual corresponde a un múltiplo de la conocida terna $3,4,5$.

1.4 Usando números de Fibonacci

Considere cuatro números de Fibonacci consecutivos cualesquiera, por ejemplo, $3,5,8$ y 13. A partir de los números anteriores se puede construir una terna pitagórica. Para ello, se procede de la siguiente manera.

- el producto de los dos números en los extremos, en este caso 3 y 13, genera un cateto.
- el doble del producto de los dos números intermedios, en este caso 5 y 8, genera el otro cateto.
- la hipotenusa se obtiene al sumar los cuadrados de los números intermedios.

Por lo tanto, $a=3\cdot 13=39$, $b=2\cdot 5\cdot 8=80$ y $c=5^2+8^2=89$. Así, se tiene la terna pitagórica $(39,80,89)$.

En general, considere los cuatro números de Fibonacci consecutivos: $F_n,\ F_{n+1},\ F_{n+2}$ y F_{n+3} y defina:

$$a = F_n \cdot F_{n+3},\ b = 2 \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2} \ \text{ y } \ c = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$$

Luego, se satisface que $a^2 + b^2 = c^2$. Para demostrarlo, basta recordar que:

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1} \ \text{ y } \ F_{n+3} = F_{n+1} + F_{n+2}$$

pues:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= (F_n \cdot F_{n+3})^2 + (2 \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2})^2 \\
&= [(F_{n+2} - F_{n+1})(F_{n+1} + F_{n+2})]^2 + (2 \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2})^2 \\
&= \left(F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2\right)^2 + 4 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2 \\
&= F_{n+2}^4 - 2 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2 + F_{n+1}^4 + 4 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2 \\
&= F_{n+2}^4 + 2 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2 + F_{n+1}^4 \\
&= \left(F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2\right)^2 \\
&= c^2
\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

1.5 Tripletas de la forma $(x, x+1, z)$

Este método genera tripletas pitagóricas de la forma (x, y, z) tales que $y = x + 1$.

Si se toma $z = y + b$, es decir, $z = x + 1 + b$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + y^2 = z^2 \Longrightarrow x^2 + (x+1)^2 = (x+1+b)^2 \\
& \Longrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1 + b^2 + 2x + 2bx + 2b \\
& \Longrightarrow x^2 - 2bx - \left(b^2 + 2b\right) = 0 \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

Luego, el objetivo de este método es determinar los valores de b para los cuales se generan todas las ternas de la forma $(x, x+1, x+1+b)$. Note que si $b = 1$ entonces (2) queda expresada como:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

Observe que la solución $x = 3$ genera $y = 4$ y $z = 5$, ‰la terna pitagórica $(3, 4, 5)$!

La siguiente tripleta de la forma $(x, x+1, x+1+b)$ es $(20, 21, 29)$, por lo tanto, el valor que conviene tomar para b es 8. En efecto, note que si $b = 8$ entonces (2) queda expresada como:

$$x^2 - 16x - 80 = 0 \Longrightarrow (x-20)(x+4) = 0$$

ahora, la solución $x = 20$ genera $y = 21$ y $z = 29$, es decir la terna pitagórica $(20, 21, 29)$, como era de esperar.

La siguiente tripleta se genera para $b = 49$, en este caso:

$$x^2 - 98x - 2499 = 0 \Longrightarrow (x-119)(x+21) = 0$$

La solución $x = 119$ genera $y = 120$ y $z = 169$, es decir la terna pitagórica $(119, 120, 169)$.

En resumen,

$$b=1 \to x^2-2x-3=0 \Longrightarrow (x-3)(x+1)=0 \to (3,4,5)$$

$$b=8 \to x^2-16x-80=0 \Longrightarrow (x-20)(x+4)=0 \to (20,21,29)$$

$$b=49 \to x^2-98x-2499=0 \Longrightarrow (x-119)(x+21)=0 \to (119,120,169)$$

En estos tres casos, se generan dos patrones sumamente interesantes.

- El valor de b que se necesita para generar la siguiente terna pitagórica se obtiene al sumar el valor de x y z de la terna anterior. Por ejemplo, note que en la terna $(3,4,5)$ se tiene $3+5=8$ que es el valor necesario para generar la tripleta $(20,21,29)$ y que en la terna $(20,21,29)$ se tiene $20+29=49$, que es el valor necesario para generar la tripleta $(119,120,169)$.

- El segundo factor de cada uno de los polinomios cuadráticos tiene la forma $(x+k)$ donde k coincide con el valor de y de la terna anterior. Por ejemplo, note que en el polinomio $(x-20)(x+4)$ el 4 coincide con el valor de y de la terna $(3,4,5)$ y en el polinomio $(x-119)(x+21)$ el 21 coincide con el valor de y de la terna $(20,21,29)$.

En general, si se define $b_1=1$ y b_n como el valor que se necesita para generar la tripleta pitagórica (X_n,Y_n,Z_n) tal que $Y_n=X_n+1$ entonces se cumplen las siguientes relaciones:

1. $b_{n+1}=X_n+Z_n$ genera el valor de b necesario para construir la terna $(X_{n+1},Y_{n+1},Z_{n+1})$ para $n\geq 2$.

2. La ecuación (2) queda expresada como:

$$x^2-2b_{n+1}x-\left(b_{n+1}^2+2b_{n+1}\right)=0 \Longrightarrow (x-X_{n+1})(x+Y_n)=0$$

La prueba de este resultado puede ser consultada en $[3]$.

1.6 Otras curiosidades

Para finalizar, se analizarán algunas proposiciones interesantes que giran en torno a las ternas pitagóricas, siendo esto apenas una muestra de la gran belleza de un tema que, aunque pareciera pequeño, involucra muchos conceptos matemáticos.

Proposición 1.1 *En toda terna pitagórica al menos uno de los números es par.*

Esto se sigue de los siguientes hechos:

- El cuadrado de un número impar es un número impar.
- La suma de dos números impares es par.

Luego, suponga que a, b y c son tres enteros positivos que definen una terna pitagórica. Si alguno de los tres números anteriores es par el resultado se sigue trivialmente. Si a, b y c son todos impares entonces a^2+b^2 es un número par. Luego, debe darse que c debe ser par pues sino se llegaría a un absurdo.

Proposición 1.2 *En toda terna pitagórica generada por:*

$$m^2-n^2,\ 2mn \text{ y } m^2+n^2 \qquad m, n \text{ enteros positivos tales que } m>n$$

al menos uno de los números m^2-n^2, $2mn$ ó m^2+n^2 es divisible por 5.

Prueba: Si 5 divide a m ó n el resultado se sigue pues 5 dividiría a $2mn$. Así, suponga que 5 no divide a ninguno de los dos. Aplicando el algoritmo de la división se tiene:

$$m = 5q_1 + r_1 \text{ con } r_1 \in \{1,2,3,4\}$$

$$n = 5q_2 + r_2 \text{ con } r_2 \in \{1,2,3,4\}$$

Luego:

$$m^2-n^2 = (m+n)(m-n) = [5q_1+r_1+5q_2+r_2]\,[5q_1+r_1-5q_2-r_2]$$

Si $r_1+r_2=5$ entonces 5 divide al factor $[5q_1+r_1+5q_2+r_2]$ y, por lo tanto, también divide a m^2-n^2. Si $r_1=r_2$ entonces 5 divide al factor $[5q_1+r_1-5q_2-r_2]$ y, por lo tanto, también divide a m^2-n^2. Falta analizar cuatro casos casos $r_1=1$ y $r_2=3$, $r_1=2$ y $r_2=4$, y sus simétricos. Sin embargo, en todos los casos note que:

$$r_1^2+r_2^2 \text{ es un múltiplo de } 5$$

Luego,

$$\begin{aligned} m^2+n^2 &= (5q_1+r_1)^2+(5q_2+r_2)^2 \\ &= 25q_1+10q_1r_1+r_1^2+25q_2+10q_2r_2+r_2^2 \\ &= 5\,(5q_1+2q_1r_1+5q_2+2q_2r_2)+r_1^2+r_2^2 \end{aligned}$$

Así,

$$m^2+n^2=(5q_1+r_1)^2+(5q_2+r_2)^2$$

será también un múltiplo de 5.

En resumen, si m ó n es un múltiplo de 5 entonces $2mn$ también lo es. Si no, alguno de los números m^2-n^2 ó m^2+n^2 será un múltiplo de 5.

EJERCICIOS

1.3 Pruebe que al menos uno de los números m^2-n^2, $2mn$ o m^2+n^2 es divisible por 3.

Proposición 1.3 *Las ternas pitagóricas que satisfacen que la medida de la hipotenusa (c) y el cateto de mayor medida (digamos b) sean números consecutivos, es decir, ternas de la forma:*

$$(a,b,b+1) \;\; con \; b>a \tag{1.3}$$

se pueden generar a partir de cierta intepretación conveniente de las fracciones mixtas de la forma $n\frac{n}{k}$ *con n un número natural y* $k=2n+1$.

Por ejemplo, la fracción mixta $1\frac{1}{3}$ equivale a $\frac{4}{3}$. El denominador de esta fracción corresponde al valor de a en (3) y el numerador corresponde al valor de b; así se genera la tripleta pitagórica $(3,4,5)$. Observe algunos otros casos:

$$2\tfrac{2}{5} = \tfrac{12}{5} \text{ genera } (5,12,13)$$

$$3\tfrac{3}{7} = \tfrac{24}{7} \text{ genera } (7,24,25)$$

$$4\tfrac{4}{9} = \tfrac{40}{9} \text{ genera } (9,40,41)$$

Si se realiza este mismo proceso para la fracción general $n\frac{n}{k}$ se tiene que ésta equivale a la fracción propia:

$$\frac{nk+n}{k} = \frac{n(2n+1)+n}{2n+1} = \frac{2n^2+2n}{2n+1}$$

luego, para verificar este método bastaría ver si la tripleta:

$$\left(2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1\right)$$

es una tripleta pitagórica. En efecto, algebraicamente es fácil probar que:

$$(2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = \left(2n^2+2n+1\right)^2$$

Por otra parte, las tripletas generadas con la fórmula anterior cumplen cierta particularidad visual cuando n toma como valor las potencias de 10.

$$\begin{array}{llllll}
n = 10 & \to & (21\,, & 220\,, & 221) \\
n = 10^2 = 100 & \to & (201\,, & 20200\,, & 20201) \\
n = 10^3 = 1000 & \to & (2001\,, & 2002000\,, & 2002001) \\
n = 10^4 = 10000 & \to & (20001\,, & 200020000\,, & 200020001) \\
 & \vdots & & &
\end{array}$$

Como se puede observar, para generar una nueva tripleta pitagórica, el proceso se reduce a agregar una cantidad determinada de ceros en ciertas posiciones dentro de los números que conforman la tripleta anterior.

Proposición 1.4 *Sólo existen dos triángulos pitagóricos cuyo perímetro es numéricamente igual a su área.*

Prueba: Considere el triángulo pitagórico de catetos a y b e hipotenusa c. Se tiene que:

$$a+b+c=\frac{ab}{2} \tag{1.4}$$

$$a^2+b^2=c^2 \tag{1.5}$$

despeje el valor de c en (4) y sustituya en (5) :

$$a^2+b^2=\left(\frac{ab}{2}-a-b\right)^2 \Longrightarrow a^2+b^2=\frac{a^2b^2}{4}+a^2+b^2-a^2b-ab^2+2ab$$

$$\Longrightarrow 0=\frac{a^2b^2}{4}-a^2b-ab^2+2ab \Longrightarrow 0=ab\left(\frac{ab}{4}-a-b+2\right)$$

como $a,b>0$ entonces:

$$\frac{ab}{4}-a-b+2=0 \Longrightarrow \frac{ab}{2}=2a+2b-4$$

Sustituyendo (4) se llega a que:

$$a+b+c=2a+2b-4 \Longrightarrow c=a+b-4 \tag{1.6}$$

Por otra parte,

$$a^2+b^2=c^2 \Longrightarrow (a+b)^2=c^2+2ab \tag{1.7}$$

si se despeja al valor de $a+b$ en (4) y se sustituye en (7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{ab}{2}-c\right)^2 = c^2+2ab \Longrightarrow \frac{a^2b^2}{4}-abc+c^2 = c^2+2ab \\
&\Longrightarrow ab\left(\frac{ab}{4}-c\right) = 2ab \\
&\Longrightarrow \frac{ab}{4}-c = 2 \Longrightarrow c = \frac{ab}{4}-2 \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

de (6) y (8) se tiene que $c = a+b-4$ y $c = \dfrac{ab}{4}-2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&a+b-4 = \frac{ab}{4}-2 \Longrightarrow a-\frac{ab}{4} = 2-b \Longrightarrow a\left(1-\frac{b}{4}\right) = 2-b \\
&\Longrightarrow a\left(\frac{4-b}{4}\right) = 2-b \Longrightarrow a = \frac{4(2-b)}{4-b} \Longrightarrow a = \frac{4(b-2)}{b-4}
\end{aligned}$$

Además, note que:

$$a = \frac{4(b-2)}{b-4} = \frac{4(b-4+2)}{b-4} = \frac{4(b-4)+8}{b-4} = 4+\frac{8}{b-4}$$

por lo tanto, $a = 4+\dfrac{8}{b-4}$. Luego, como a debe ser un entero positivo entonces b debe pertenecer al conjunto $\{5,6,8,12\}$.

Si se prueban las cuatro posibilidades para b, se determina que se generan únicamente dos[1] ternas pitagóricas $(6,8,10)$ y $(5,12,13)$. En efecto, los triángulos pitagóricos de medidas $a=6, b=8$ y $c=10$ o de medidas $a=5, b=12$ y $c=13$ satisfacen que su perímetro es numéricamente igual a su área, y por la construcción realizada, éstos son los únicos triángulos pitagóricos con esta característica.

[1]También se genera la terna $(8,6,10)$ que es equivalente a $(6,8,10)$.

1.7 Conclusiones

A continuación se resumen los métodos y las proposiciones estudiadas sobre ternas pitagóricas.

- Cualquier cuadrado perfecto n^2 puede ser expresado como una suma de cuadrados de la forma $n^2 = x^2 + y^2$, en donde:

$$x = \frac{2mn}{m^2+1} \quad \text{y} \quad y = \frac{n\left(m^2-1\right)}{m^2+1}$$

  con m un número racional mayor que uno.

- Las ternas $\left(2m, m^2-1, m^2+1\right)$ y $\left(2pq, p^2-q^2, p^2+q^2\right)$ son ternas pitagóricas para m, p y q números enteros positivos tales que $p > q$.

- La terna $\left((m+2n)\cdot m, 2n(n+m), m^2+2mn+2n^2\right)$ es una terna pitagórica para m y n números enteros positivos.

- Cuatro números de Fibonacci consecutivos: $F_n,\ F_{n+1},\ F_{n+2}$ y F_{n+3} definen una terna pitagórica de la forma (a,b,c) si se toma:

$$a = F_n \cdot F_{n+3},\ b = 2\cdot F_{n+1}\cdot F_{n+2} \ \text{ y } \ c = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$$

- La terna pitagórica (X_n, Y_n, Z_n) con $Y_n = X_n + 1$ y $Z_n = X_n + 1 + b_n$, tal que:

$$b_1 = 1 \text{ y } b_{n+1} = X_n + Z_n \text{ para } n \geq 2$$

  se puede generar mediante una de las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 2b_n x - \left(b_n^2 + 2b_n\right) = 0$$

- En toda terna pitagórica al menos uno de los números es par.

- En toda terna pitagórica generada por:

$$m^2-n^2,\ 2mn \text{ y } m^2+n^2 \qquad m,n \text{ enteros positivos tales que } m > n$$

  al menos uno de los números $m^2-n^2,\ 2mn$ ó m^2+n^2 es divisible por 5.

- Las ternas pitagóricas que satisfacen que la medida c de la hipotenusa y el cateto de mayor medida (digamos b) sean números consecutivos, es decir, ternas de la forma:

$$(a, b, b+1) \text{ con } b > a$$

  se pueden generar a partir de cierta intepretación conveniente de las fracciones mixtas de la forma $n\frac{n}{k}$ con n un número natural y $k = 2n+1$.

- Sólo existen dos triángulos pitagóricos cuyo perímetro es numéricamente igual a su área.

Bibliografía

[1] Benito, M. (2004). *Algunos problemas diofánticos*. Tesis de Doctorado, Departamento de Matemáticas y Computación. Universidad de la Rioja, España.

[2] J. H. Silverman. "Pythagorean triples". `www.math.brown.edu/~jhs/frintch2ch3.pdf`

[3] R .Dye, R. Nickalls. "A new algorithm for generating Pythagorean triples'. Mathematical Gazette, Vol 82, pp. 86-91. University of Newcastle, UK.

[4] R. Knoott. Página personal. `www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Pythag/pythag.html`