Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10, N^o 2. Marzo 2010

Utilización de un Modelo Praxeológico para el Desarrollo de Organizaciones Didácticas

Alberto Camacho Ríos
camachoalberto@hotmail.com
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México

Resumen

A través de algunos ejemplos de organizaciones matemáticas (OM), en este artículo se pone de manifiesto la manera de cómo la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) aporta respuestas a la pregunta de si ¿es posible que estudiantes de ingeniería sean capaces de organizar el conocimiento matemático?. Se inicia con la *tecnología* como principio funcional que norma la actividad del ingeniero a través de la cual es posible entender la organización de las praxeologías, vistas como OM cuyo contenido es integrado esquemáticamente por los argumentos [Tareas, Técnicas, Tecnologías y Teoría]. Se hace un breve recorrido histórico para reconocer las *técnicas* como prácticas sociales que llevan a la estructuración de las OM y se analiza la propuesta de Chevallard para el diseño de organizaciones didácticas (OD). Finalmente, se plantea un modelo epistemológico integrado por una OD con la que estudiantes de ingeniería ordenen una OM del conocimiento a través de una tarea T propuesta para ese fin.

Palabras claves: Tecnología, Técnica, Tarea, TAD, Proyecto

Abstract

Through some examples of mathematical organizations (MO), in this article the way is shown of how the Anthropological Theory of Didáctic (ATD) contributes answers to the question of if it is possible that engineering students are able to organize the mathematical knowledge? One begins with a functional principle that norm the activity of the engineer, in this case the *technology*, through what it is possible to understand the organization of the praxeologías, views these as OM whose content is integrated by the arguments [Tasks, Techniques, Technologies and Theory]. A brief historical route is made to recognize the *techniques* like social practices that take to structuring of the MO and the proposal to Chevallard for the design of didactic organizations (DO). Finally, an epistemologic model integrated by a DO considers with which engineering students orderedd a MO of the knowledge through a propose task T for that aim.

KeyWords: Technology, Technique, Task, ATD, Project

1.1 Introduction

El artículo es orientado por la pregunta: ¿Es posible que estudiantes del nivel de ingeniería sean capaces de establecer objetos de la matemática a partir del conocimiento matemático escolar?

Siguiendo ésta última, se incorpora un estudio del concepto de *praxeología* distinguido por Y. Chevallard en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), reconocida como una organización matemática (OM) que lleva a los estudiantes a *construir* argumentos de la matemática misma. El objetivo del trabajo es el de entender la TAD y establecer, para experimentar, las OM y las organizaciones didácticas (OD) en la escuela mexicana. No obstante, en el escrito sólo se plantea desde la TAD el diseño de una OM a través de una OD. Desde esa perspectiva, en el apartado 2 se analiza bajo un punto de vista histórico la profesión del ingeniero, partiendo de la *tecnología* como argumento normativo de dicha profesión. En el apartado 3 se resume el modelo que incorpora las actividades del ingeniero denominándole espacio real o *macro-espacio,* como es sugerido en la TAD, y verificando su semejanza con el esquema praxeológico $[T,\tau,\theta,\Theta]$ que se coloca en un *micro-espacio* de trabajo escolar. Ambos espacios contienen un ingrediente de investigación común para la TAD como son las *técnicas* τ. En el mismo apartado se hace un reconocimiento de la TAD a través de la transposición didáctica, así como de las OM desde la definición de Chevallard. En el apartado 4 se plantean las *técnicas* τ comúnmente usadas en la resolución de problemas de la matemática y desarrolladas en diferentes épocas, que posibilitan la estructura de teoremas que les constituyen. Se ejemplifica con algunas OM. El apartado 5 es dedicado al análisis de las propuestas de diseño de OD propuestas por el grupo Belga-Francés-Español *Amperes,* tomando como referencia las OM. Aquí mismo se muestra un programa de OD diseñado a partir de los *momentos* o episodios de trabajo, considerándola como una actividad de investigación. Al final, en el apartado 6, aparece el planteamiento de una OM desarrollada para estudiantes de ingeniería y estructurada a través de una OD, dando inicio con una tarea T_1 propuesta en un curso de ecuaciones diferenciales parciales (EDP), con el objetivo de que construyan la OM. En las conclusiones se asumen las técnicas τ, componentes de las praxeologías, como *prácticas sociales* que norman la actividad en el aula.

1.2 Tecnología e Ingeniería

1.2.1 La tecnología y la actividad de la ingeniería escolar en 1794.

Durante mucho tiempo en México, la tecnología se limitó al campo de la ingeniería de las minas. Baste recordar que en el Seminario de Minería, fundado en 1794, se posicionó el estatuto de la enseñanza de la minería otorgado por sus fundadores, Elhuyar, Del Río y otros. Desde 1774, el científico modernista Joaquín Velázquez de León, proponía en un documento llamado *Representaciones* el establecimiento de un colegio de minería, el cual debería tener un director: "hombre sabio en las matemáticas y en la física experimental, química y metálica (...) y cuatro maestros que en dos años deben impartir los siguientes cursos en español: 1.aritmética, geometría, trigonometría y álgebra (...)" (Velázquez de León, 1774, Cáp. 62-64). Los problemas que deberían abordar los egresados del pretendido colegio eran del todo geométricos y se referían a "resolver las medidas de una mina sobre la superficie, cuando no se sabe por anticipado el ángulo de inclinación de la veta". Esta última era la principal preocupación técnica de la época, puesto que la mayor parte de los pleitos entre los mineros era la imprecisa delimitación de los linderos superficiales de las minas.

Para asegurar las colindancias superficiales, Velázquez de León propuso configurar las minas a través de una serie de figuras geométricas elementales: rectas, triángulos, vértices y ángulos, tanto en el interior de los socavones como en la superficie; en sí misma, la proposición era sujeta a los Elementos de Euclides, ampliamente citados, incluyendo cuatro ejemplos que sugerían la solución del problema (véase la Figura 1.1). De esta forma, Velázquez de León dejaba entrever el *oficio del ingeniero*, en tanto profesional capaz de abordar con nuevas *facultades* problemas de ese *arte* o nueva ciencia, con la que se equiparaba a la ingeniería en la Nueva España.

Por su lado, la *génie* o ingeniería, se definía en el ambiente enciclopédico francés de finales del siglo XVIII como: "le plus haut degré auquel puissent arriver les facultés humaines". Las facultades, en ese sentido, se entendían como aquellas habilidades adquiridas por los sujetos para ejecutar acciones haciendo uso de ciertas *técnicas*. Las técnicas era inherentes a un sistema de reglas constituido por el arte; la industria, o bien, en general; a la ciencia. No obstante, en la actualidad las facultades son *capacidades* de los seres humanos y se refieren al uso de técnicas, que son sujetas a una tecnología y, sobre todo, a amplios conocimientos de la matemática incorporados estos elementos a un ambiente institucional específico. Siguiendo estas ideas, no es difícil apreciar el contexto de la profesión de ingeniero en la que se sumerge el problema de minería planteado por Velázquez de León. Este último es organizado por los siguientes argumentos:

- Un *problema* a resolver que se puede concebir como un proyecto de ingeniería.

- Una *técnica* o técnicas que consisten en la práctica de configurar la parte subterránea y superficial de las minas, que corresponde a la actividad de la topografía elemental.

- Una *tecnología* que se reconoce como la herramienta o instrumento sobre la que descansan las técnicas, en este caso son objetos de la matemática, es decir, los Elementos de Euclides.

- Una *ciencia* que alberga la organización anterior, o sea la propia ingeniería de minas.

De esta manera, la labor del ingeniero fue modificándose a partir de la propia evolución de la tecnología y la matemática. Un primer significado de la utilidad del concepto de tecnología se presume en el seminario en el año de 1845, como "el (resultado del) estudio general sistematizado y metódico del cultivo de las ciencias" (Anuarios, 1994). El punto de vista decimonónico se apropiaba así de una definición de este concepto, en la que se distingue la ciencia a través de las relaciones del hombre con la producción, muy apegado a las expectativas de la revolución industrial.

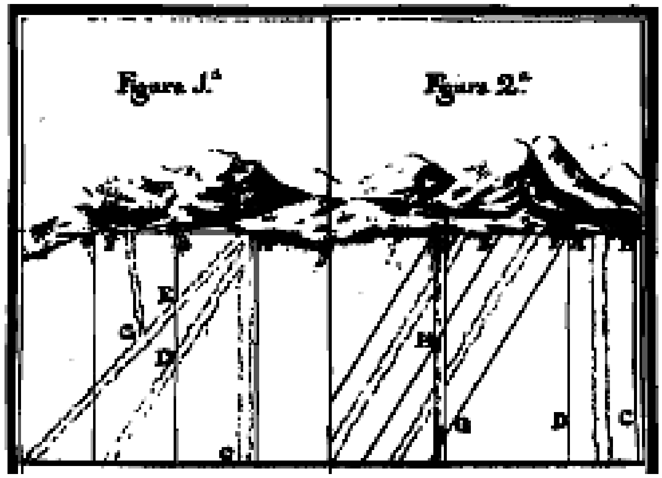

Figura 1.1 Dos de las cuatro sugerencias geométricas que hizo Velázquez de León en las *Representaciones* para las técnicas de configurar la parte subterránea y superficial de las minas

1.2.2 [Proyecto, técnica, tecnología, ciencia.]

En el presente, la tecnología es considerada como una *teoría de las técnicas* la cual se constituye en ciencia normativa de la producción de resultados de la ingeniería. Según Dujet (2008):"(...) entendemos que dicha ciencia sólo puede surgir cuando en la historia de las representaciones sociales irrumpe la necesidad pensada (la conciencia) de racionalidad junto con una exigencia de matematización."

En un lenguaje específico es frecuente denominar *tecnologías* a los conocimientos de contenido racional que son transmisibles con cierto grado de precisión (por lo general a través de textos científicos, gráficos, tablas y representaciones funcionales variadas), mientras que a las técnicas se les asigna un carácter más empírico, procedimental, que racional. Con todo, una tecnología también suele ser un instrumento cuyo manejo implica ciertas destrezas que se conciben como técnicas.

Sin embargo, los puntos de vista post-modernistas de los cuatro argumentos, que podemos agrupar en la forma: [proyecto, técnica, tecnología, ciencia], sobre todo en la ingeniería de la comunicación, sostienen que conceptos como el de *ortogonalidad*, sustraído de los sistemas ortogonales de Bessel, Fourier, Legendre, etc., juegan un papel decisivo en la creación de teorías, modelos, instrumentos y concepciones, tomando con ello en consideración que "las matemáticas son más determinantes y normativas que la propia tecnología en el desarrollo de las telecomunicaciones" (Bissell, 2009). En tal sentido la matemática deviene tecnología. En el ejemplo antes citado de la topografía subterránea, la tecnología es una herramienta conformada por objetos matemáticos ordenados bajo una axiomatización, en este caso integrados en los Elementos de Euclides. De aquí surgen las siguientes preguntas: ¿Cuál sería la ciencia normativa si el desarrollo del proyecto de ingeniería estuviera sujeto a solamente argumentos de la física? ¿O bien su desarrollo fuera integrado a diferentes ingenierías?

Sea cual fuera el elemento normativo de la ingeniería actual, este adquiere el estatus de ciencia asignándosele un nombre como el de *ingeniería tecnológica* o *ingeniería de proyecto*, la cual consiste en que los ingenieros egresados de las universidades del siglo XXI "sean capaces de optimizar el diseño de un proyecto y la eficiencia técnica de los efectos que produce" (Doujet, 2008). Esta profesión del ingeniero puede incluso equipararse con la actividad primaria de la ingeniería minera, arriba citada, a pesar de que los elementos de racionalización y matematización que sustentan las acciones actuales han sufrido una evolución progresiva, a la par de la propia evolución de la ingeniería. La organización anterior, a partir de concebir la ingeniería como ciencia, quedaría como: [proyecto, técnica, tecnología, ingeniería de proyecto] y establece el espacio real que concentra los elementos de trabajo, teóricos y prácticos, del ingeniero.

El establecimiento de modelos de enseñanza de la matemática parte del supuesto de modelos organizados semejantes al mencionado, debido a que surgen de la propia actividad que se desarrolla en la ingeniería y contienen argumentos, relacionados sobre todo con las técnicas, para la resolución de problemas de la matemática escolar.

1.3 Un modelo para la enseñanza de la matemática: la teoría antropológica de lo didáctico y las praxeologías

1.3.1 El modelo entre la teoría y la práctica.

1.3.1.1 Macro-espacio y micro-espacio. Siguiendo las ideas anteriores, un modelo educativo centrado en la tecnología se debiera mirar como un *micro-espacio* que deviene al espacio real de la ingeniería y cuyos argumentos comunes se sostienen a partir de las técnicas involucradas, es decir y de manera general:

El conjunto de técnicas organizadas para desarrollar un proyecto a través de una o más tecnologías contenidas en una ingeniería tecnológica.

Bajo esta aproximación se distinguen dos aspectos que se prevén fundamentales, por un lado:

1. La organización de las técnicas que se desprenden de la tecnología, las cuales llevan al desarrollo del proyecto, es decir, una afirmación teórica y práctica que involucra la actividad personal y, por otro, aun cuando no se menciona,

2. El reconocimiento de las tecnologías al interior de la ingeniería tecnológica a que responde. Un punto de vista, este último, que refiere la actividad relacionada con un ambiente teórico y tecnológico.

De esto último se desprende que los argumentos en juego se encuentran en dependencia unos de otros, según un esquema del espacio real de la ingeniería semejante al siguiente:

Proyecto→Técnica→Tecnología→Ingeniería de proyecto

Con esa correspondencia, la Tecnología integra las argumentaciones prácticas con las puramente teóricas, pudiéndose relacionar en dos conjuntos de la forma:

A: [Técnica/Tecnología]

B: [Tecnología/Ingeniería de proyecto]

El conjunto A: [Técnica/Tecnología] se afirma, como ya se dijo, en un bloque teórico-práctico que puede desarrollar ampliamente un sujeto, en tanto que el esquema B: [Tecnología/Ingeniería de proyecto] lo es de carácter tecnológico-teórico y es relativo a una institución (más adelante se aclara la naturaleza del término). Integrados ambos conjuntos a través de la tecnología.

Esta última aproximación del macro-espacio de la ingeniería, es semejante al esquema de OM expuesta en Chevallard (2006) en la TAD, de acuerdo a las siguientes correspondencias:

- Proyecto, en el contexto de la enseñanza de la matemática se refiere a un problema o *tarea* por resolver.
- Técnicas, son las *reglas* que emplean los estudiantes para la resolución de las tareas.
- Tecnologia, objetos de la matemática: conceptos, teoremas, definiciones, etc.
- Teoría, se refiere al marco axiomático que alberga los objetos contenidos en la tecnología.

No obstante, este punto de vista ha sido teorizado en la TAD como OM, reconociéndolo con el nombre de *praxeología matemática* que es contenida en un *micro-espacio* (Matheron y Noirfalise, 2007) de trabajo para el aula, bajo la correspondencia:

$$\underbrace{\text{proyecto, } \textit{técnica}\text{, tecnología, teoría}}_{\text{Macro-espacio de la ingeniería}} \rightarrow \underbrace{\underbrace{\text{tarea, } \textit{técnica}\text{, tecnología, teoría}}_{\text{praxeología}}}_{\text{Micro-espacio del salón de clases}}$$

Por sí mismas las praxeologías han sido asignadas con la simbología:

$$[\text{tarea: } T, \text{ técnica: } \tau, \text{ tecnología: } \theta, \text{ teoría: } \Theta]$$

Los modelos de macro-espacio y micro-espacio se relacionan en la TAD, como ya se dijo, a través de las técnicas τ_i involucradas en ambos dominios. Esto último se aclara más adelante.

1.4 3.2 Organizaciones matemáticas y praxeologías.

La TAD fue iniciada hace 25 años por Y Chevallard a partir del establecimiento de la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD). En esta última posicionó argumentos emergentes como los de *saber sabio, saber para enseñar, saber enseñado, saber aprendido*, ampliamente discutidos y utilizados por investigadores y profesores mexicanos, así como de otros países, contemplando el saber a través de objetos: axiomas, teoremas, definiciones, etc. Bajo la aproximación TTD, puso de manifiesto que la mayoría de los fenómenos didácticos relacionados con la enseñanza de las matemáticas se encuentran imbuidos en una componente de *transposición*, toda vez que inseparables de aquellos otros fenómenos relacionados con la producción, uso y difusión de las matemáticas. La transposición, en sí misma, y en el contexto que interesa, tiene que ver con los cambios que sufre un conocimiento en su transición del macro-espacio, integrado por las técnicas usadas en las prácticas de ingeniería establecidas en diferentes épocas, al micro-espacio del salón de clases.

De lado de la transposición, una segunda contribución apareció en 1995 al buscar una herramienta teórico-práctica que llevara a modelizar y organizar con detalle las prácticas matemáticas, incluyendo los objetos de la matemática como componentes inseparables de éstas.

En el marco de la TAD, lo anterior dio lugar a la noción de *praxeología matemática*. Según Chevallard, las matemáticas solamente se comprenden como una práctica humana, *antropológica*, es decir una praxeología (para no perder detalle con la definición hemos dejado el lenguaje francés original):

> De là sortit la notion de *praxéologie*, ce mot étant choisi pour désigner l'union d'un bloc practico-technique $\prod = [T/\tau]$, formé d'un type de tâches T et d'une technique τ pour accomplir las tâches del type T, avec un bloc tecnológico-théorique $\Lambda[\theta/\Theta]$, constitué d'une technologie θ justifiant la technique τ et de une théorie Θ justifiant la technologie θ (Chevallard, 2006, p 714).

En palabras propias, una praxeología, siguiendo a Chevallard, designa el estudio (*logía*) de la práctica humana (*praxeó*), en el cual el símbolo Λ representa una ciencia, personal o institucional, que incorpora una cierta práctica $\prod$, ciencia, la primera, que concibe y controla esta última permitiendo con ello iniciar su accionar.

El esquema se coloca en una escala particular en la que el objetivo es establecer una OM, a través de resolver una tarea escolar T :problemas, ejercicios, ciertas demostraciones, por ejemplo determinar una derivada, diseñar un pentágono regular, obtener las raíces del polinomio: $x^3 - 2x + 1 = 0$, etc.,[1] posible sólo a través de una o más técnicas τ_i, por lo general reglas o recetas, que llevan a sistematizar la resolución de la tarea, un *saber-hacer*. Las técnicas se pliegan a una *gran cuestión* simbolizada por Chevallard como $\prod$, establecida a través del problema de enseñanza que se quiere resolver, por ejemplo: ¿Cómo se resuelve una ecuación polinomial? o bien ¿Cómo determinar la tangente en un punto de una curva?, etc., las cuales devienen a los programas de enseñanza.

Las grandes cuestiones tienen respuestas en las actividades de matematización de la realidad desarrolladas a lo largo de la historia, en macro-espacios de la ingeniería o ciencias de la tierra. La respuesta es por lo general una técnica o técnicas con las que se intenta resolver las tareas implícitas en la gran cuestión, de la que a su vez se desprende una tecnología θ, concebida como un discurso matemático formado de objetos: teoremas, axiomas, definiciones, entre otros, que a su vez dependen de una teoría axiomática Θ. En tanto los cuatro argumentos $[T, \tau, \theta, \Theta]$ se conciben conocimientos institucionalizados *legales o necesarios* (es decir, en común acuerdo con la totalidad de los estudiantes y el maestro), para ser utilizados en la enseñanza, y sujetos a un ambiente escolar específico, en sí OM. En este sentido, la TAD suministra un marco epistemológico general de las matemáticas (Bosch y Gascón, 2002), que permiten describir la génesis de los conocimientos desde un punto de vista constructivista, poniendo en el centro la resolución de problemas. La TAD sitúa la génesis del conocimiento durante la construcción del bloque práctico-técnico $\prod = [T/\tau]$, disponiéndolo como el lugar donde ocurre un proceso de transposición didáctica, entre la técnica gestada en el espacio real y su transformación al micro-espacio del aula, que sirve para dar respuesta a la gran cuestión a partir de establecer desde esta última tareas T_i específicas.

Una buena cantidad de investigaciones europeas relacionadas con el uso de esta noción se concentran en documentos como el citado para Chevallard (2006), los cuales han dado vida a nuevos argumentos que buscan la consolidación de la TAD. Por ejemplo, Fonseca, *et., al* (2006) incorpo-

[1] Chevallard asume que la *actividad humana* puede verse como constituida de un encadenamiento de tareas t surgidas de *tipos* de tareas T, cada uno de los tipos T siendo, salvo excepciones, designados con la ayuda de un verbo de acción (calcular, trazar, resolver, etc.) y de un tipo de objetos (calcular las ecuaciones de segundo grado, escribir un informe de la clase, diseñar un hexágono regular), véase Chevallard (2007-2008).

raron a la TAD la noción de *completitud relativa* para mostrar que el algoritmo conocido como *Regla de Rufini*, esencial en la resolución de ecuaciones polinómicas en el nivel de enseñanza secundaria español, es una OM incompleta "debido a la insuficiencia de utilizarla con otros ingredientes técnicos y tecnológicos" (Ibid, p. 145).

Cabe mencionar que la orientación primitiva de la definición de praxeología tomó sentido a partir de que Chevallard reconoció las técnicas de ingeniería que aplicaban los *corps* franceses en las propias técnicas usadas para las *marchas* militares, más esta disertación sólo aparece como una aclaración limitada en (Chevallard, 2006, pp. 713-714). Sin embargo, el modelo praxeológico así expuesto era, bajo una estructura inversa, semejante a las OM $[T, \tau, \theta, \Theta]$, planteadas por los autores de libros de matemáticas de finales del siglo XVII y principios del siglo XX. En la búsqueda de cierta especificidad, y para aclarar esto último, enseguida se caracterizan algunas OM a partir de ejemplos.

1.5 Las técnicas como prácticas sociales

1.5.1 Prácticas sociales y grandes cuestiones

Las reglas o técnicas usadas en la resolución de ejercicios de la matemática, adquieren en la actualidad la nominación de *prácticas sociales* debido a su origen apriorístico deslindado de los teoremas de que actualmente dependen. Si se valora la enorme cantidad de reglas de ese tipo que a lo largo de la historia de la matemática, de la ingeniería y de la propia enseñanza, han surgido, este último punto de vista se reafirma. Por ejemplo, la *regla de la falsa posición*, fundamental en la determinación de las raíces de polinomios de cualquier grado, apareció en un medio ambiente social en el que la parte importante era su utilidad, sin interesarse tanto por integrarla a un teorema formal. En este mismo sentido se puede hablar de la *regla de Newton-Raphson* para el mismo fin, o bien la mencionada *regla de los cuatro pasos* para determinar la derivada de una función, con la que es posible llegar a esta última sin necesidad del reconocimiento del teorema correspondiente (la regla de los cuatro pasos se refiere a la derivación por incrementos).

Una OM a partir de la regla de los cuatro pasos, se puede esquematizar en el contexto de la TAD de la siguiente manera, tómese como ejemplo:

1. La gran cuestión $\prod$ se puede considerar a partir de la pregunta:

   $\prod$: ¿Cómo se determina la derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$?

   En este caso la derivada $f'(x)$ es vista como un objeto matemático.

2. De la gran cuestión se desprenden tareas T_i, en este caso una tarea T_1 que precisa de determinar la derivada $f'(x)$ por incrementos de la función $f(x)$. En este sentido la regla serviría de puente para que los estudiantes llegaran a establecer el concepto de derivada $f'(x)$. La tarea T_1 se pudiera escribir como:

   T_1 : *Establecer la derivada* $f'(x)$ *de la función* $f(x)$

Al encontrar la técnica τ_1 que responda a la tarea T_1, los estudiantes estarán en condición de iniciar un proceso de *construcción* de conocimiento matemático. Los siguientes pasos resumen cómo llegar al conocimiento deseable.

3. Dada la tarea T_1, la técnica τ_1 correspondiente se resume en los siguientes cuatro pasos:

   (a) Dado $f(x)$ se incrementa x en Δx, como $f(x+\Delta x)$;

   (b) Se hace la diferencia $f(x+\Delta x) - f(x)$;

   (c) Se divide la diferencia entre Δx y,

   (d) Se aplica $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ para determinar la derivada en la forma: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

4. La construcción del objeto θ_1 a través de la técnica τ_1 es precisamente el concepto $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

5. Finalmente, la teoría Θ a la que se sujeta el objeto θ_1, es el Análisis Matemático.

No obstante, la técnica τ_1, en este caso la regla de los cuatro pasos, no asegura el éxito del establecimiento del objeto θ_1, debido a que la OM debe estar en correspondencia con una OD adecuada, además, ¿Qué otra técnica o técnicas alternativas τ_i, se pueden usar para ese mismo fin?

Sin embargo, y continuando con la disertación inicial, las reglas dejaron de ser importantes cuando se dio inicio a la formalización de la matemática, de manera que las técnicas o reglas dieron lugar al establecimiento de los teoremas respectivos. Así, a lo largo de los siglos XVII y XVIII, las OM descritas en los libros de texto se encontraban en procesos de formalizar el conocimiento. Sobre todo los argumentos que desde finales del siglo XIX se conocen como teoremas, eran en los textos explicados en forma de *proposiciones* relatadas con palabras sencillas y utilizando algunos símbolos, cuya demostración devenía en reglas útiles para la resolución de problemas. Es decir se priorizaron los teoremas por encima de las reglas, como si estas últimas se desprendieran de los primeros, en el intento de organizar claramente los argumentos matemáticos. Más la propia organización se estableció en sentido inverso al surgimiento histórico de las técnicas.

Como ejemplo de lo anterior, en la Tabla I se muestra parte de la organización que se usó en L'Hôpital (1696) para la estructuración del Analyse des Infiniment Petits. Nótese el esquema usado según los argumentos: *proposición y demostración* (columna de la izquierda) y, como conclusión, *regla* (columna de la derecha). La regla correspondiente es relegada a segundo plano.

PROPOSITION I. Problême. 4. PRENDRE *la différence de plusieurs quantités ajoûtées ensemble, ou soustraites les unes des autres.* Soit $a+x+y-z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite; c'est-à-dire qu'elle devienne $x+dx$; y de- A ij **PROPOSICIÓN I** **Problema** **4. TOMAR** ***la diferencia de varias cantidades sumadas, o sustraídas las unas de las otras.*** **Sea** $a+x+y-z$ **de la que hay que tomar la diferencia. Si suponemos que** x **aumenta una porción infinitamente pequeña, entonces decimos que ella deviene** $x+dx$	REGLE I. *Pour les quantités ajoûtées, ou soustraites.* On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée. **REGLA I** ***Para las cantidades sumadas o sustraídas*** **Tomemos la diferencia de cada término de la cantidad propuesta, y dejando los mismos signos, compondremos otra cantidad que será la diferencia buscada.**

Tabla 1.1 La tabla muestra el modelo: *proposición, demostración, regla*, usado por (L'Hôpital, 1696, p. 4) para dar organización a su obra

Con todo, en los textos actuales de uso para la enseñanza matemática, el esquema que organiza los argumentos pasa por establecer las reglas en forma de teoremas yendo enseguida a su demostración, lo cual da lugar al planteamiento de ejercicios. Véase por ejemplo, en el tema de derivación, la *regla de la potencia* colocada en forma de teorema en (Purcel, *et., al*, 2001, pp. 142-143). Curiosamente la regla es integrada indivisiblemente al objeto mismo.

Si bien es posible esquematizar una OM a través de las praxeologías, la actividad que se sigue se centra en desarrollar una OD del material que modele las acciones que hay que desplegar en el salón de clases con los objetos de la propia OM. La unión de ambas organizaciones, OM y OD, da lugar a lo que se conoce como *modelo epistemológico*, que a su vez ordena la actividad global de la enseñanza. La forma en que los estudiantes desarrollan las actividades en el salón de clases, a través de la OM y OD, se reconoce como *meso-espacio*. Por su lado, La OM puede llevarse a cabo partiendo de hacer una síntesis de las reglas que resultan de la resolución de las tareas por parte de los estudiantes, es decir: Resolver tareas T_i,con la cual es posible enunciar las técnicas τ_i correspondientes, de las cuales se desprende un discurso explicativo y justificativo que constituye el teorema θ que surge de las técnicas.

Como actividad de investigación esto último es posible, no obstante, ¿cómo se plantea una OD a través de las praxeologías?

1.6 Las praxeologías como actividades de investigación

1.6.1 El proyecto Amperes y algunas propuestas

El equipo de trabajo Belga-Francés-Español, integrado al INRP y comisiones inter-IREM Didactique (IREM, por sus siglas en francés: Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques: Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas; INRP, Institut Nacional de Recherche Pédagogique: Instituto Nacional de Investigación Pedagógica), propuso en el proyecto *Amperes*, a finales del año 2007 y principios de 2009, una serie de actividades de investigación en torno a las praxeologías. La parte fundamental de sus propuestas se centran en las OD, según:

Una actividad de estudio y de investigación se construye alrededor de una (gran) cuestión la cual conduce a los alumnos, bajo la dirección del profesor, al estudio por la investigación de un *objeto* o incluso de un *tema* del programa. Ello permite tres etapas de estudio:

1. El *primer reencuentro con un tipo de tareas*.
2. Su *exploración* y la *emergencia de una técnica* que permite realizar,
3. La *constitución del medio ambiente* del saber asociado a la técnica (tecnológico-teórico).

En un marco sobre el *¿Qué hacer?* se plantean:

1. Analizar un tema que cause problemas a los estudiantes, ello lleva a establecer la *gran cuestión* (análisis *a priori* y *a posteriori*) ,
2. Estudiar las condiciones de realización efectiva de tales actividades (análisis didácticos *a priori* y *a posteriori*),
3. Dejar el control del *juego* al profesor,
4. No dejar la confianza total en los medios de comunicación (profesor, manuales, libros, Internet), colocándoles en la parte adecuada de la experimentación.

Se cuestionan algunas ideas sobre el *¿Cómo hacer?* para iniciar una investigación, o sea:

1. Partir de diferentes *dominios* del programa de estudio.
2. Hacer un análisis de su OM a partir de la transposición didáctica (tipos de tareas y técnicas, sus justificaciones, teoremas, definiciones, etc.).
3. Investigar al menos una de las grandes cuestiones a que responde ese dominio ¿el saber responde a esas cuestiones?.
4. Una o varias de esas cuestiones, ¿dan para *generar el saber* para enseñar o una parte de éste?.
5. Esas cuestiones ¿pueden ser transpuestas por los estudiantes?
6. ¿Cómo hacer para *devolver, guiar, dirigir* esas cuestiones y la producción de respuestas? (Es esta la OD en sí misma).
7. ¿Cómo hacer para que el trabajo de los alumnos se manifieste como actividades de investigación, es decir, un proyecto y no como el enunciado de un problema donde el estudio ya fue realizado?

Las OM y OD ya probadas se conciben inicialmente *a priori*, de modo que se anticipan las cuestiones de devolución, anticipación de reacciones a partir de los conocimientos previos, así como el papel que juegan en ese esquema los profesores y estudiantes. Analizar las respuestas *a posteriori*, retocar las OM y OD y rediseñar así un documento útil en el que previamente se hayan explicado los por qué de las elecciones del material y sus consecuencias.

Por otro lado, el punto de vista de Matheron y Noirfalise (2007), miembros del grupo *Amperes*, da mejores perspectivas para el diseño de las OD. Estos propusieron "una enseñanza dinámica fundada sobre cuestiones problemáticas y generatrices de estudios y de investigaciones". La parte dinámica de la propuesta supone colocar a los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos a través de operarlos como problemas reales incorporando técnicas y herramientas de uso procedimental tomados de la ingeniería. Propusieron a sus estudiantes, en una calca, OD relacionadas con problemas de medición de ángulos internos y lados de triángulos, en algunos casos lados inaccesibles, de modo que las técnicas de uso fueron aprovechadas de las actividades que realizaban los topógrafos para la medición de triangulaciones a mediados del siglo XX. En este sentido, crearon a los estudiantes un micro-espacio, que modelaba al macro-espacio real de la topografía, incluyendo juegos de geometría, que simularon ser *instrumentos de observación*, en este caso el símil teodolito-transportador. La simulación del macro-espacio fue situada en el nivel de liceo francés. La bondad de los resultados se deja ver enseguida:

> Cette question est traitée rapidement: les élèves comprennent le problème posé, tracent avec la règle et le compas (...) le triangle demandé et sont convaincus de la superposabilité de toutes les figures de la classe. Ils effectuent les mesures des angles et vérifient leur construction grâce au calque du professeur (Matheron y Noirfalise, 2007, p. 9).

De la situación se rescatan dos elementos fundamentales, por un lado, la transposición que hicieron los estudiantes de la actividad entre el macro espacio y el micro espacio, así como, por otro, la propia transposición de las técnicas empleadas para la medición, usada en su momento por los topógrafos. El uso de técnicas que se desprenden de la topografía es de por sí muy vasta.

En otro contexto, en Camacho (2010) se plantea una dinámica semejante a estudiantes de arquitectura de una institución mexicana, con la que se buscó que llegaran a construir una tabla trigonométrica de valores angulares entre 0^0 y 360^0. Para el caso se usaron la técnicas empleadas en el macro-espacio de la astronomía ptolemaica, sugiriendo a los estudiantes construir en cartoncillo un círculo trigonométrico de radio igual 10 cm., graduado de 20 en 20 grados (micro-espacio), y midiendo en cada caso los catetos opuesto y adyacente para cada valor angular, cuyo resultado se fue colocando en la tabla para cada una de las razones correspondientes, en este caso: seno, coseno y tangente (meso-espacio). Con la tabla, los estudiantes pudieron construir las razones mencionadas, las cuales los llevaron a pasar al contexto variacional en la definición de las funciones trigonométricas.

1.7 La Organización Didáctica

De acuerdo a las propuestas del grupo *Amperes*, es posible concebir una OD partiendo de una OM privilegiando las tareas T_i, que hacen necesaria la *emergencia* de técnicas τ_i, para con ello partir hacia la construcción del bloque tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$. En este sentido, y parafraseando a Chevallard, se dice que el objetivo de toda OD es permitir la existencia en el sistema didáctico de una OM.

Chevallard contempla que toda OD reposa sobre seis *momentos* de trabajo o estudio que es posible organizar en cuatro grupos, se cita en (Chopin, 2006, pp. 307-308), que se exhiben enseguida, véase el cuadro1.2. Los momentos de estudio no se refieren a tiempos cronológicos dedicados a las etapas de trabajo, sino a los reencuentros o episodios dimensionales de los estudiantes con cada actividad. Por ejemplo, bajo la dirección del profesor, los alumnos "se reencuentran por primera vez con una tarea T". No hay que dejar de lado que estos planteamientos se refieren al trabajo de investigación que se puede experimentar con estudiantes del nivel concerniente.

Grupo I (Actividades de estudio y de investigación)

1. Momento del *(primer)* encuentro con T
2. Momento de *exploración* de T y de la *emergencia de la técnica* τ
3. Momento de construcción *del bloque tecnológico-teórico* $[\theta/\Theta]$

Grupo II (Síntesis)

1. Momento de la *institucionalización*

Grupo III (Ejercicios y problemas)

1. Momento *del trabajo* de la organización matemática (y en particular *de la técnica*)

Grupo IV (Controles)

1. **Momento** *de la evaluación*

Tabla 1.2 Actividades por desarrollar, por parte de los estudiantes, en una OD para dar definición a una OM, su institucionalización, resolución de problemas y evaluación, en el contexto de investigación

1.8 Ostensivos y no ostensivos.

Durante el primer episodio de encuentro de los estudiantes con la tarea T, tienen lugar en el desarrollo del problema los objetos *ostensivos* y los *no ostensivos*. Una definición ostensiva se puede establecer como todo proceso por el cual se enseña a una persona a comprender un conocimiento por medio del uso de los sentidos –la escritura, sonidos, gestos, etc. – El típico ejemplo del extranjero que en París desea acompañar su comida con pan en un restaurante, de modo que con gestos, señales y palabras, en su lengua, convence al mesero de su deseo. El mesero, a fuerza de meterse en razón el interés del sujeto, le reafirma la palabra *pain*, de suerte que el turista asume esto último asintiendo con la cabeza, convencido de haber construido la palabra adecuada a su necesidad.

Ese tipo de objetos son fácilmente manipulables. En el ambiente escolar, los objetos ostensivos ayudan a los sujetos a pasar de una técnica a otra en un proceso de resolución de problemas. Los alumnos de los cursos de cálculo diferencial sobrellevan una buena cantidad de gestos y señales en el proceso de adquisición de conocimientos, sobre todo cuando esto último ocurre a través de ejercicios. Algunos profesores hacen uso de los brazos, subiéndolos, arqueándolos e invirtiéndolos, para mostrar a sus estudiantes las formas que van adquiriendo las parábolas conforme cambia el valor del parámetro a en la ecuación $y = ax^2$, para $a < 1$ y $a > 1$. Ante ese estímulo, los estudiantes toman una actitud semejante, que es llevada, incluso, hacia otras expresiones gráficas que implican el reconocimiento de una técnica para la graficación de funciones. De esa manera, los ostensivos posibilitan el acceso a técnicas para la resolución de las tareas. En cambio la expresión simbólica $y = ax^2$, en este sentido, es un objeto no ostensivo que no posee la materialidad del ostensivo mismo, y que para ser comprendido se constituye como controlador límite (Acosta, 2008, p. 8), que orienta en los sujetos la manipulación de los propios objetos ostensivos.

De la resolución de la tarea T_i se sigue la integración de las técnicas τ_i o grupo de reglas que llevan a la estructuración del bloque teórico-práctico. Las reglas se deducen de las coyunturas y aprietos a los que estuvo sujeta la resolución. A los alumnos les corresponde resolver el ejercicio, de modo que a partir de la solución sea posible enunciar las reglas en forma proposicional, contándose así con el bloque teórico-práctico de la praxeología, así establecido $\prod = [T/\tau]$. Una praxeología no es una estructura rígida y aislada, puesto que en ocasiones una misma tarea puede ser realizada por diversas reglas. La derivada por incrementos a través de la regla de los cuatro pasos, así como la utilidad, en el mismo problema, de la técnica del teorema del binomio de Newton, antes mencionadas, dejan ver dos técnicas diferentes sujetas en común a una tecnología idéntica para enfrentar dicha tarea. Lo mismo se puede decir de la regla de Newton-Raphson y la regla de la falsa posición, las cuales dependen de un único teorema.

El siguiente paso consiste en que, a partir de las técnicas, los estudiantes sean capaces de construir el teorema del que estas se desprenden. El teorema es una síntesis de las reglas, diseñado en forma proposicional, incluyendo cierta simbología, que depende del grado de formalismo que vive en la institución escolar. El teorema se determina a través de hacer una síntesis de las técnicas, trabajo que desarrollan los estudiantes. Bien definido, el teorema justifica y hace inteligibles las técnicas involucradas en el problema. El profesor puede intervenir en el momento de la construcción para apoyar a los estudiantes en la integración a este último de posibles hipótesis que de las reglas resulten. La parte estructural de la OM, así como el primer Grupo de trabajo, como se menciona en el Cuadro II, se concluye con el enunciado de la teoría que agrupa al teorema.

La segunda parte corresponde a la institucionalización de la OM, o bien su construcción *bruta* de la que emerge lo *matemáticamente necesario* (Chevallard, 2006, p. 732). Una actividad que se ha probado en la experimentación del diseño de situaciones, en la Teoría de la Situaciones Didácticas (TSD) de Brosseau, es que durante esta etapa cada equipo escribe en el pizarrón los resultados, de manera que se puedan comparar los argumentos expuestos entre ellos. El profesor actúa como mediador reorientando las propuestas y comentarios de los estudiantes, en la búsqueda de reorganizar cada argumento hacia un fin previamente establecido. Usa su experiencia sugiriendo cierta notación y simbología, de manera que al final del episodio resulte una OM efectivamente institucionalizada por los equipos.

Durante la etapa de *trabajo* el profesor sugerirá a los estudiantes problemas cuya solución reafirmen la utilidad de las técnicas contenidas en OM para su resolución. El objetivo es *trabajar* suficientemente la técnica para mejorarla y, de ser necesario, *retocar* la tecnología, definición o teorema establecido.

Para la fase de evaluación se mide la validez de los aspectos de *construcción* y *aprendizaje* del conocimiento en juego. En este sentido, lo que se evalúa es la eficacia de la técnica, su potencia, seguridad y robustez, a partir de la construcción e institucionalización de la OM, debido a que esta última no está formando a una persona, y sí a todo un grupo u organización praxeológica.

1.9 Diseño experimental de una praxeología

1.9.1 Actividades preliminares

Se describe enseguida el diseño experimental de una OD que incorpora una OM *local*. El objetivo es que durante la sesión de clase elegida los estudiantes den estructura a una OM iniciando con el planteamiento de una tarea T dada por el profesor y dentro de la cual importa la definición del teorema θ respectivo.

En este caso, la *gran cuestión* $\prod$ sobre la que reposan las actividades se refiere a la pregunta:

$\prod$: ¿Cómo se resuelve una EDP de primer orden haciendo uso de funciones arbitrarias?

Las técnicas τ_i que dan respuesta a la gran cuestión $\prod$ se encuentran en el libro llamado *Theorié des fonctions analytiques* desarrollado por Lagrange a finales del siglo XVIII, y sirve de espacio real sobre el que descansa el conocimiento en juego.

La tarea Tpropuesta fue elegida del programa de EDP colocada en el tema de la primera unidad llamado "ecuaciones diferenciales parciales de primer orden", del cual se desprende el origen de las EDP de ese tipo. Para introducir el surgimiento de estas últimas, el profesor comúnmente examina ecuaciones de superficies de revolución cuadráticas de la forma $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = a^2$, de las que se sigue declarar a (x, y) variables independientes, en tanto z es variable dependiente. La técnica consiste en derivar parcialmente la ecuación, tanto en $x$como en y, de manera que la igualación de ambos resultados permita eliminar las constantes y funciones arbitrarias ahí contenidas. El resultado de la igualación da para establecer la EDP de primer orden que caracteriza a las superficies de revolución iniciales, es decir: $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. De aquí se sigue el planteamiento de un segundo ejercicio de una superficie de revolución semejante a la anterior, por ejemplo: $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = \tan^2 \alpha$, pidiéndo a los estudiantes el mismo trabajo y procedimientos empleados en el caso ya citado. Esta sería la técnica τ que deben encontrar los estudiantes para resolver el problema.

Los diferentes tipos de superficies de revolución cuadráticas se agrupan en una función arbitraria de la forma $z = f\left(x^2 + y^2\right)$.

1.9.2 Las actividades a desarrollar

Las actividades correspondientes al Grupo I, que se muestran en el Cuadro I, se sugieren de en el siguiente micro-espacio de trabajo:

Momento I. El reencuentro por vez primera con la tarea T_1.Esta última se concibe como:

1) T_1 : Determine la EDP de primer orden que caracteriza las superficies de revolución de la forma $z = f\left(x^2 + y^2\right)$.

Momento II. De exploración de T y de la emergencia de la técnica τ:

Durante esta etapa el profesor debe tener el control de los episodios de trabajo, cuidando que los estudiantes lleven la resolución de la tarea al fin previsto, en este caso llegar a la EDP de primer orden. Se puede sugerir derivar casos particulares de funciones en dos variables como por ejemplo: $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = a^2$, que sugieran a los estudiantes las técnicas para derivar la función propuesta: $z = f\left(x^2 + y^2\right)$, y con ello estar en condición de establecer la EDP correspondiente.

2) Determine la ecuación diferencial de que depende la función $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = a^2$.

Después de lograr resolver ese tipo de ecuaciones, se pasa a la forma general:

3) Determine la ecuación diferencial parcial de la que depende la función $z = f\left(x^2 + y^2\right)$.

Momento III. De construcción del bloque tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$

4) Haga una síntesis de las reglas que uso en los ejercicios anteriores para establecer el teorema del que dependen.

Después de un tiempo prudente, el profesor deberá pasar a cada representante de los equipos para que escriban las síntesis de las reglas y el teorema respectivo en el pizarrón. La técnica τ es contenida en reglas T_i semejantes a las siguientes:

(a) Derivar $z = f\left(x^2 + y^2\right)$ en x usando la regla de la cadena.
(b) Derivar $z = f\left(x^2 + y^2\right)$ en y usando la regla de la cadena.
(c) Igualar a) y b)
(d) Eliminar funciones arbitrarias y coeficientes.
(e) Despejar y simplificar.

El teorema θ debe integrarse haciendo una síntesis de las reglas y colocarse en un enunciado. Semejante al siguiente:

Siendo $z = f\left(x^2 + y^2\right)$ una superficie de revolución, entonces, esta última es caracterizada por la EDP $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Momento IV. De la institucionalización, Grupo II.

5) El profesor debe observar las similitudes en los enunciados de las reglas propuestas por cada equipo, de manera que ayude al grupo a establecer una sola técnica τ que se resume de las propuestas dadas, así como un solo teorema θ.

Momento V. De trabajo.

6) Es suficiente dar problemas alternos a los estudiantes, de modo que hagan uso de la técnica τ, así determinada. Por ejemplo resolver para casos particulares como en $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = \tan^2 \alpha$.

Momento VI. De evaluación.

7) La etapa se establece a partir de lograr la construcción del teorema θ por parte de los estudiantes, o bien se puede llegar a ella con un examen formal que involucre al conocimiento.

1.10 Conclusiones

Las respuestas a las grandes cuestiones son prácticas sociales sobre las que descansa la estructura de las OM y el diseño de las OD. En este sentido la TAD sugiere hacer uso de respuestas colocadas en macro-espacios como en la ingeniería, para investigar alrededor de problemas *difíciles* o específicos que obstaculizan a los estudiantes en clase. En otras palabras, se sugiere *recrear* las técnicas de los espacios reales en el micro-espacio del salón de clases, cuidando las cuestiones de transposición del conocimiento matemático involucrado, con la finalidad de que los estudiantes construyan este último.

Más ciertamente que los espacios reales donde se coloca la ingeniería y otras disciplinas como la arquitectura, óptica, física, topografía, etc., proveen de técnicas útiles para la resolución de problemas. No obstante, dentro de los propios cursos de matemáticas en el salón de clase, se encuentran las respuestas o técnicas necesarias que deben ayudar a la definición de las OM. El ejemplo que se plantea da cuenta de ello. Con todo y lo arbitrario del ejemplo, es posible instaurar *a priori* la OM y su puesta en escena a través de la OD. Otros serán los resultados de su experimentación en el aula que lleven a retocar y reorganizar la OD.

Bibliografía

[1] Anuarios (1994). "Anuarios del Colegio Nacional de Mienería 1845, 1848, 1859, 1863". De la compilación hecha por Clementina Díaz y de Ovando. Edición faccimilar, Universidad Autónoma de México.

[2] Acosta, M (2008). "Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie". Universite Grenoble 1-Joseph Fourier. Ecole Doctorale Mathematiques, Sciences et Technologies de l'Information. Doctorat Mathématiques, Informatique Universite de Geneve Ecole Doctorale Sciences de l'Education.

[3] Bissel, Ch (2009). "Models and black boxes". Mathematics in communications engineering. Extraído el 31 de julio de 2009 de:`http://ict.open.ac.uk/tic/talks/cb1e.html`

[4] Boch, M, J. Gascón (2002). "Organiser l'Etude, 2. Théories et Empiries". Actes de la 11 Ecole d'été de didactique des Mathématiques. La pensée Sauvage.

[5] Camacho, A (2010). "Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial". México: Revista Iberoamericana de Educación Superior, *RIES.* (En proceso de arbitraje).

[6] CD AMPERES (2008). "Conception et diffusion d'Activités mathématiques et parcours d'etude et de recherche pour l'enseignement secondaire". INRP et Commission inter-IREM Didactique. Aix Marselle Bourdeaux, Clermont-Ferrand Poitiers, Toulouse (IUFM). Extraido el 9 de agosto de 2009 de:`http://www.inrp.fr/formation-formateurs/catalogue-des-formations/formations-2008-2009/redonner-du-sens-a-l2019enseignement-des-mathematiques/amperes#296`. Diapositiva 2.

[7] Chopin, M (2006). "Le temps didactique en Théorie Anthropologique du Didactique. Quelques remarques methodologiques á propos des 'moments de l'étude"'. En Ruíz-Higueras, L. Estepa, A García, F. J (Eds). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la teoría Antropológica de lo Didáctico, pp. 301-318. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Impreso en España.

[8] Chevallard, Y (2006). "Passé et présent de la Théorie Antropologique du Didactique". En Ruíz-Higueras, L. Estepa, A García, F. J (Eds). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la teoría Aantropológica de lo Didáctico, pp. 705-746. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Impreso en España.

[9] Chevallard, Y (2007, 2008). "Didactique fondamentale". Notes & documents. Extraído el 9 de agosto de 2009 de `http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique-fondamentale-3-2.pdf`

[10] Dujet, Ch. (2008). "Mathématiques pour l'ingénieur". Conferencia dictada en el ICME llevado a cabo en Monterrey, México, en julio de 2008. Extraido el 20 de julio de 2009 de: `http://www.m2real.org/spip.php?article1&lang=es`

[11] Fonseca, C, M. Boch, J. Gascón (2006). "El momento de trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: El caso de la 'Regla de Rufini"'. En Ruíz-Higueras, L. Estepa, A García, F. J (Eds). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la teoría Aantropológica de lo Didáctico. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Impreso en España.

[12] L'Hôpital (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* A Paris D'La imprimerie Royale.

[13] Matheron, Y, Noirfalise, R, (2008). "Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER. Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP". Extraido el 5 de septiembre de 2009 de: `http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/cdamperes/textes-fondateurs.`

[14] Purcel, E, D Varberg, y S Rigdon (2001).*Cálculo.* México, Pearson Educación, Octava Edición.

[15] Velázquez de León, J (1774). "Representaciones que a nombre de la minería de esta Nueva España hacen al Rey Vuestro Señor". Impresa en México por D. Felipé de Zúñiga y Ontiveros, calle de Pálma.