ArtículoRevista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10, Nº 2. Marzo 2010

Sumas Exhaustivas De Los Dígitos De Números Entero

Prof. Mario Peral Manzo
mario_peral_manzo@hotmail.com
Universidad Pedagógica Nacional
Unidad 152,Atizapán

Resumen

Este es un trabajo empírico sobre un conjunto cíclico cerrado cuyos elementos son el conjunto de los llamados números dígitos tanto positivos como negativos. Su objetivo es el de mostrar algunas aplicaciones de este conjunto en reflexiones sobre la secuencia de Fibonacci y una aplicación práctica en la determinación de números de control de tarjetas de débito y crédito.

Palabras claves:Sumas exhaustivas de dígitos, conjunto cíclico cerrado, secuencia, espacio fásico, número de control, números dígitos (digitales), código de barras, código semacode.

Abstract

This is an empirical work on a closed cyclic set whose elements are the whole of the so-called positive and negative digit numbers. Its objective is to show some applications of this set in consideration on the Fibonacci sequence and a practical application in identifying control numbers on debit and credit cards.

KeyWords: Exhaustive Digit Summation, closed cyclic group, sequence, phase space, number of control digits (digital), bar code, code semacode.

1.1 Antecedentes

Convendremos en llamar "conjunto cíclico cerrado" al conjunto

$$\{(0,9),(1,-8),(2,-7),(3,-6),(4,-5),(5,-4),(6,-3),(7,-2),(8,-1),(9,0)\},$$

perteneciente a una recta numérica geométricamente equivalente a una curva cerrada que podemos representar con la siguiente figura

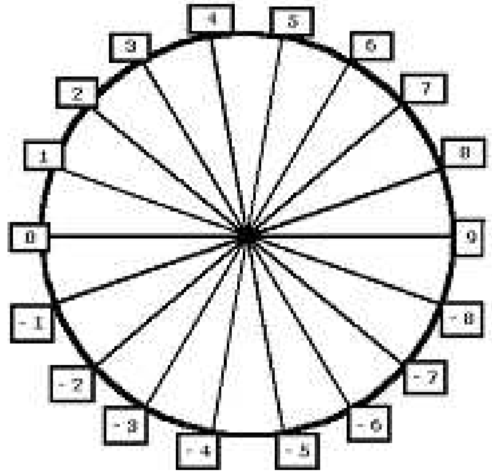


Figura 1.1

Esta curva, congruente con una círcunferencia, ilustra la equidistancia de los dieciocho puntos tanto a lo largo de su circunferencia como a través de su superficie mediante líneas rectas que cruzan el centro de este círculo que nos sirve de modelo (en otros términos: cada "par complementario" delimita su diámetro).

Los antecedentes de este trabajo son los artículos que publicamos en diversos medios, entre los que más destacan la revista de Ciencia y Desarrollo (CONACYT, México) y el de la Revista digital Matemática, Educación e Internet, ITCR. Nos referimos a los artículos: "Goldbach: Una Conjetura Millonaria",([1]); "Aproximaciones a la Secuencia Primaria",([2]) y "Replanteamiento de la Conjetura de Goldbach",([3]).

También señalamos dentro de los antecedentes el llamado "Algoritmo de Codificación de Número" que permite evitar errores de transcripción y que también permite determinar la validez de una tarjeta de débito o de crédito.

Citemos la página web del sitio en geocities llamado "SiliconValley" ([4]) que describe el ...

```
Algoritmo de codificación del Número
 La codificación del número de la tarjeta se realiza en tres pasos:
   Se multiplican por dos todos los dígitos de las posiciones
   impares y aquellos mayores de 9 se suman los dos dígitos.
     Resultado= Ax2
      si Resultado >10 entonces
      Resultado=Resultado-9.
     Después de calcular los nuevos números de las posiciones impares
     se suman entre si todos los dígitos. a1b2 c3d4 e5f6 g7h8 i9j0 ->
      Resultado= a+1+b+2+c+3+d+4+e+5+f+6+g+7+h+8+i+9+j+0
     Si el resultado es múltiplo de 10 entonces el número de tarjeta es válido.
      Resultado MOD 10 = 0
```

Al final del trabajo proponemos algunas sugerencias para su aplicación en aras de una mayor seguridad en el manejo de esos instrumentos de pago y de crédito.

1.2 Desarrollo de Nuestras Ideas.

Parafraseemos el axioma de Avicena: Los números no son más que el nueve al que se le suma en determinado residuo, dado que nuestro sistema de numeración solo está compuesto por nueve y solamente nueve números digitales más el cero: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9.

Conjunto de inicio:

$R = \{(0, 9), (1, -8), (2, -7), (3, -6), (4, -5), (5, -4), (6, -3), (7, -2), (8, -1), (9, 0)\}$

Es un conjunto cíclico cerrado, que sirve de base para aplicar las siguientes normas:

1. Todo número entero puede ser reducido a través de la suma exhaustiva de sus dígitos (sumar hasta que quede expresado uno y solamente un número de un solo dígito) a cualquiera de los elementos de cada pareja del conjunto "R". Ejemplo: 621 se reduce a 6+2+1=9. El nueve forma parte de cualquiera de las parejas (0,9) y (9,0). Es claro que estamos jugando con aritmética modular.

2. Al número que resulta de esta suma exhaustiva lo denominaremos "r". Así, convendremos en expresar la "reducción" del ejemplo a la que se refiere la primera norma como $621r9$.

3. Todo número par cuya suma exhaustiva dé por resultado un "r" impar, asumirá el valor par o cero de la pareja correspondiente en el conjunto "R". Ejemplo: 216 se reduce a $2 + 1 + 6 = 9$, como 216 es par entonces expresamos $216r0$; otro ejemplo: tomemos 752 que se reduce a $7 + 5 + 2 = 14, 1 + 4 = 5$, vemos que su "$r$" se ubica en la pareja $(5, -4)$, por lo tanto expresaremos $752r - 4$.

4. Todo número impar cuya suma exhaustiva dé por resultado un "r" par, asumirá el valor impar de la pareja correspondiente en el conjunto "R". Ejemplo: 285 se reduce a $2 + 8 + 5 = 15, 1 + 5 = 6$, vemos que su "$r$" se ubica en la pareja $(6, -3)$, por lo tanto expresaremos $285r - 3$.

5. Todo número par cuya "r" sea par, conservará el valor par de la pareja del conjunto "R" correspondiente. Así, 852 se reduce a $8 + 5 + 2 = 6$, por lo tanto $852r6$.

6. Todo número impar cuya "r" sea impar, conservará el valor impar de la pareja del conjunto "R" correspondiente. Así, 117 se reduce a $1 + 1 + 7 = 9$, por lo tanto $117r9$.

7. Todo número impar (con excepción del 3) cuya "r" asuma cualquiera de los valores: $3, -3, 9$, es un número compuesto, es decir, no es número primo, pues es divisible por tres, por seis o por nueve.

   Ejemplo: 871294522113 se reduce a $8 + 7 + 1 + 2 + 9 + 4 + 5 + 2 + 2 + 1 + 1 + 3 = 45 = 9$, por lo tanto, es divisible por nueve: $871294522113/9 = 96\,810\,502\,457$.

8. Todo número impar, excepto los $5n > 5$, cuya "r" asuma cualquiera de los valores: $\pm 1, \pm 5, \pm 7$ tiene la posibilidad de ser número primo; en otras palabras, los números primos solo asumen para sus "r" tales valores; sin embargo, esta afirmación no es transitiva, pues hay números complejos cuyas "r" asumen estos valores; de ahí que solo hablemos de "una posibilidad" cuando es incierto que un número sea o no primo. En cambio, cuando estamos seguros de

que estamos tratando con algún número primo (con excepción del 2 y el 3) podemos estar seguros de que sus "r" asumirán cualquiera de los valores mencionados en esta norma.

9. De la aplicación de las normas 3 y 4 se puede deducir un conjunto de números de dos dígitos que dan cuenta de cuándo un número dígito (con excepción del cero y del nueve) puede ser "negativizado" o "positivizado" (cambiar su valor positivo en negativo o viceversa) por algún otro número dígito, fuera de las excepciones señaladas en esta norma.

   Ese conjunto "n" es $n = \{14, 28, 33, 47, 52, 66, 71, 85\}$ (secuencia que progresa según una razón combinada de 14 en 5; aplicando a este conjunto las reglas 3 y 4 es fácil verificar las "r" para sus respectivos elementos tales que: $14r-4, 28r-8, 33r-3, 47r-7, 52r-2, 66r-6, 71r-1y85r-5$; de este modo, el conjunto resultante del proceso de "reducción" de "n" es: $r = \{-4, -8, -3, -7, -2, -6,\ -1, -5\}$ (secuencia que progresa según una razón combinada de -4 en $+5$)

   Esto no parece tener mayores consecuencias pero, manipulando esta propiedad, pueden obtenerse resultados por lo menos curiosos (que veremos más adelante). En un análisis superficial observamos que,

   - Se forman cadenas cerradas de "negativización":
     - 1)4)7)1, que se lee: "1 negativiza a 4 que negativiza a 7 que negativiza a 1".
     - 2)8)5)2, que se lee: "2 negativiza a 8 que negativiza a 5 que negativiza a 2".
   - Si tratásemos la primer cadena como un solo número: 1471, observamos que es un número primo. Si hacemos lo mismo con la siguiente cadena y lo expresamos como 2852, es obvio que no es primo pero si le restamos la unidad obtenemos 2851 que sí es primo. Por otro lado, si a 2852 le restamos 1471 resulta 1381 y, efectivamente, este resultado es un número primo.
   - Tanto el 6 como el 3 podríamos decir que se "auto-negativizan".

10. Toda secuencia infinita de números enteros puede ser expresado como un conjunto finito de valores "r" que es en realidad un conjunto cíclico cerrado (sabemos que este conjunto es finito debido a que toda secuencia de la que se obtiene dicho conjunto progresa dada una razón determinada y debido a esta circunstancia las secuencias son, por definición, recurrentes).

11. Un conjunto finito de valores "r" de una secuencia es un modelo de autómata que describe trayectorias cíclicas cerradas simétricas (en consecuencia y en este sentido no es correcto hablar de una secuencia "pura" de números primos, puesto que éstos no progresan de acuerdo con razón alguna; esta característica es la que los hace un conjunto sumamente enigmático e interesante, pues nos habla de una complejidad casi orgánica. Los números primos, para ser comprendidos, han de estar en el contexto de alguna secuencia que necesariamente incluye a los números compuestos).

1.3 Aplicaciones:

A partir del siguiente cuadro basado en la secuencia de Fibonacci F y de sus "r"...

F	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368
r	1	1	2	3	5	8	−5	3	−2	1	−1	0	−1	−1	−2	−3	−5	−8	5	−3	2	−1	1	0

Tabla 1.1

Intentemos graficar la trayectoria de un autómata cuyos valores "r" se han deducido de la secuencia de Fibonacci.
El comportamiento del autómata se hará visible en algún "espacio fásico" (Wikipedia define: "En mecánica clásica , el espacio fásico o espacio de fases es el espacio formado por las posiciones generalizadas y sus momentos conjugados correspondientes... Físicamente cada punto del espacio fásico representa un posible estado del sistema mecánico", ([5]). Elijamos tres "espacios fásicos": una superficie cuadriculada, una línea curva cerrada de dieciocho puntos equidistantes y el plano cartesiano.

A. Primer espacio fásico: superficie cuadriculada.

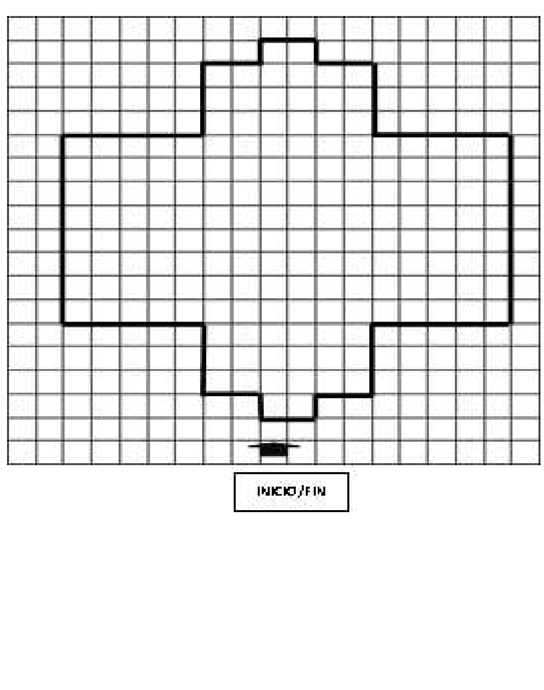
En una superficie cuadriculada se instruye al autómata para que se desplace sobre las líneas verticales u horizontales (partiendo de un punto de origen (0) arbitrariamente determinado en el cruce de perpendiculares) según el siguiente programa: desde origen 0, desplazarse un lugar sobre las horizontales (a la izquierda o a la derecha según la "r" sea negativa o positiva, respectivamente), luego sobre las verticales (hacia arriba o hacia abajo según la "r" sea positiva o negativa, respectivamente); detenerse cuando se complete el ciclo.

Para un poco de más claridad, convengamos en denominar "x" a los "desplazamientos" horizontales en tanto que "y" será la denominación para los "desplazamientos" verticales. Veamos la asignación de esta nomenclatura "n" para cada "r" de "F" en la siguiente tabla:

F	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368
r	1	1	2	3	5	8	−5	3	−2	1	−1	0	−1	−1	−2	−3	−5	−8	5	−3	2	−1	1	0
n	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y

Tabla 1.2

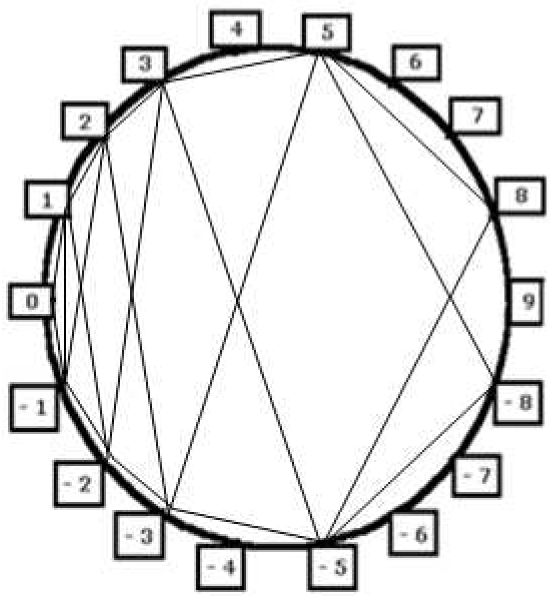
El resultado es el siguiente polígono...



La suma de los ángulos internos de este polígono es de 3240^o , o sea $9 \cdot 360$ dada la fórmula $S = 180(20-2)$ puesto que este polígono tiene 20 lados.

B. Segundo espacio fásico: superficie de un círculo.

En una línea curva cerrada de dieciocho puntos equidistantes, le pedimos al autómata que recorra la superficie interna (espacio fásico) tocando los puntos que le indiquen el conjunto "r" (los puntos de la semi/curva superior del 0 al 9 son positivos, los de la parte inferior son negativos).
El resultado es el siguiente gráfico...



Sobre el gráfico de arriba podemos afirmar que es un recorrido óptimo que hace el autómata (de acuerdo con sus valores "r") dentro del espacio fásico que delimitan los puntos de la curva cerrada de los puntos finitos equidistantes que hemos marcado.

C. Tercer espacio fásico: el plano cartesiano.

Ahora tratemos la secuencia "r" de Fibonacci F como un conjunto R de 12 pares ordenados para representarlos en el plano cartesiano, de acuerdo con el siguiente cuadro:

F	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368
r	1	1	2	3	5	8	-5	3	-2	1	-1	0	-1	-1	-2	-3	-5	-8	5	-3	2	-1	1	0
R	-1,1		-2,3		-5,8		5,3		2,1		1		(-1, -1)		(-2, -3)		(-5, -8)		(5, -3)		(2, -1)		-1	

Tabla 1.3

Obtenemos el siguiente gráfico:

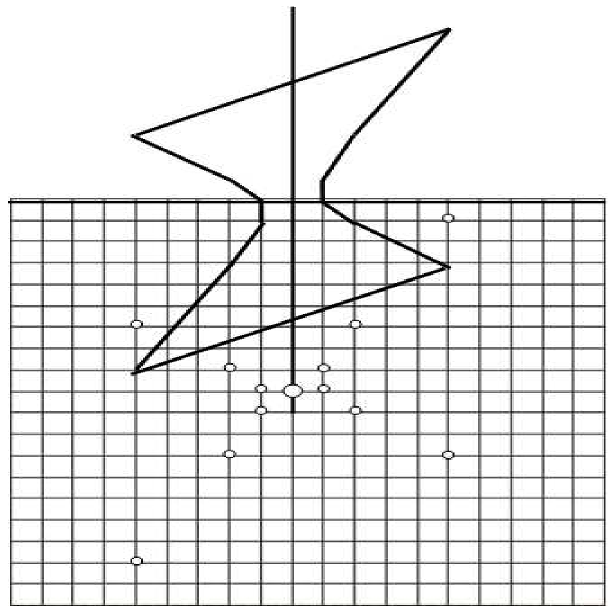


Figura 1.2

Aquí tenemos un polígono en forma de reloj de arena. Destacan dos parábolas simétricas por rotación.

Sobre las propiedades de estas parábolas muy poco podemos decir porque rebasan los objetivos de este trabajo; solo son representaciones gráficas, junto con las anteriores representaciones, de un conjunto recursivo al que puede ser reducido la secuencia de Fibonacci de acuerdo con las reglas anunciadas.

1.4 Aplicación alternativa al "Algoritmo de Codificación de Número".

Al inicio de este trabajo nos referimos al algoritmo de codificación de número que se usa para determinar el "número de control" de tarjetas de crédito y débito (también así se hace en la mayoría de tarjetas de tiendas departamentales).

El algoritmo básicamente consiste en multiplicar de manera separada por dos los dígitos que están en una ubicación impar dentro del número de la tarjeta. Posteriormente se suman los dígitos ubicados en posición par y el resultado se suma a los resultados obtenidos con los impares; si el resultado final es un número múltiplo de diez, entonces la tarjeta es válida.

Nuestra propuesta consiste en determinar un número dígito mediante la suma exhaustiva de todos los dígitos del número de tarjeta y posteriormente ese número dígito "agrandarlo" obteniendo de manera sucesiva un nuevo número mediante sumas exhaustivas hasta que ciertas cifras se vuelvan periódicas.

Un ejemplo: Supongamos que el número de cierta tarjeta es 12342345 3456 4567 (por supuesto éste no es número válido para tarjeta alguna) al sumar de manera exhaustiva sus dígitos, obtenemos el número dígito "1", ahora procedemos a aplicar nuestra alternativa:

1 es 1, por lo tanto 11; 1 más 1 es igual a 2, por lo tanto 112; $1+1+2-4$; por lo tanto 1124 . . .

$1+1+2+4-8$, por lo tanto . . .

11248; $1+1+2+4+8-16, 1+6-7$, por lo tanto. . .

112487; $1+1+2+4+8+7-23, 2+3-5$, por lo tanto. . .

1124875; $1+1+2+4+8+7+5-28$, $2+8-10$; $1+0-1$, por lo tanto. . .

11248751. Fin.

Aquí termina nuestro procedimiento porque se repetirán de manera periódica los dígitos 1, 2, 4, 8,7 y 5.

De esta manera, el número de control de la tarjeta número1234 2345 3456 4567 es el número 1124875 (no incluimos el "1" final); este número de control bien podría aparecer en la tarjeta como un código de barras o uno cuadrangular (código Semacode); la ventaja en este último es que podría codificarse también algún texto que el cliente y/o el banco quiera incluir para su propia seguridad.

En un inicio nuestro procedimiento parece más complicado que el vigente. No es así: porque gracias a al conjunto de los números dígitos podemos recurrir a un simple cuadro de concentración:

Números dígitos Resultado de las sumas exhaustivas de los dígitos de un determinado número	Números de control
1	1124875
2	224875124875
3	3363
4	44875124875
5	55124875
6	6636
7	775124875
8	8875124875
9	9999

Tabla 1.4

De este modo, los únicos números negativos corresponderían a los números de control 3363 y 6636. Esto para otros posibles usos.

1.5 Conclusiones.

La suma exhaustiva de los dígitos de números enteros abre un campo de interesantes reflexiones cuando se los analiza en el contexto de secuencias como las de Fibonacci; permite visualizar su comportamiento dentro de un espacio física determinado mediante representaciones gráficas.

La manera usual con la que las instituciones bancarias o comerciales determinan el número de control de cualquier tarjeta (*Algoritmo de Codificación del Número*), complementada con la suma exhaustiva de los dígitos de los números de las mismas y, posteriormente, la aplicación de nuestra propuesta de números de control para su codificación en semacode, creemos, se ofrece útil para mejorar el uso seguro y legal de esos documentos financieros.

Bibliografía

[1] Peral Manzo, M. "Goldbach: Una Conjetura Millonaria". En `http://www.conacyt.mx/comunicacion/revista/EdicionesAnteriores/img/Revista%20CyD%202001/CyD160sep-oct2001.pdf`. Revista Ciencia y Desarrollo. CONACYT (visita del 18 de julio de 2009 a las 17:13 hrs.)

[2] Peral Manzo, M. "Aproximaciones a la Secuencia Primaria". En `http://www.conacyt.mx/comunicacion/revista/ArticulosCompletos/C_SecuenciaPrimaria.html`. Revista Ciencia y Desarrollo. CONACYT (visita del 18 de julio de 2009 a las 17:07 hrs.)

[3] Peral Manzo, M. "Replanteamiento de la Conjetura de Goldbach". En `http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesV8_n1_2007/Replanteamiento_de_la_Conjetura/index.html`. Revista digital Matemática, Educación e Internet,ITCR (visita del 18 de julio de 2009 a las 17:17 hrs.)

[4] Web en geocities. `http://www.geocities.com/SiliconValley/Chip/1490/phreaking/cuenta3.html`. (Visita del 18 de julio de 2009 a las 17:03 hrs.) **Nota del Editor:** Esta web de geocities no se encuentra disponible a la fecha.

[5] Wikipedia. `http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_f%C3%A1sico`.(Visita del 20 de julio de 2009 a las 17:13 hrs.)