Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 11, Nº 2. Enero – Agosto 2011.

Supra/Razón de los Números "Granizo"

Mario Peral M.
mario_peral_manzo@hotmail.com
Universidad Pedagógica Nacional (Unidad 152, Atizapán). México.

Resumen.

Presentamos la aplicación de una sencilla criba sobre la progresión de los números enteros positivos impares con el fin de aplicar de manera sucesiva la fórmula $3n+1$ del algoritmo de Collatz con el que se construyen secuencias que comienzan en algún determinado entero positivo y concluyen en la unidad como expresión entera última y que después, si se continúa aplicando el algoritmo, dicha sucesión deviene en una sucesión periódica. Al aplicar nuestra criba llegamos a una "supra/razón" que nos permite determinar un límite a la fórmula $3n+1$.

Palabras claves: algoritmo, criba, configuración modular, iteración, Conjetura de Collatz, números "granizo", supra/razón, ecuación de Pell, función $C(n)$ números de la forma $4n+1$, primos gemelos.

Abstract.

We present the implementation of a simple screening on the progression of positive odd integers to successively apply the formula $3n+1$ Collatz algorithm to construct sequences that start at any given positive integer and conclude in the last entire unit as an expression and then, if it continues to implement the algorithm, such succession becomes a regular succession. By applying our screening we reached a supra/reason "that allows us to determine a limit to the formula $3n+1$.

KeyWords: algorithm, sieve, modular design, iteration, Collatz Conjecture, "hailstone numbers", supra/reason, Pell equation, function $C(n)$ numbers of the form $4n+1$, twin primes..

1.1 La Conjetura de Collatz

El algoritmo propuesto por Collatz básicamente ordena: "si se hace presente un número impar, tríplicalo y al producto súmale la unidad; si se te presenta un número par divídelo por dos; continúa este procedimiento hasta que se exprese la unidad".

Collatz formuló esta hipótesis en 1937 a la que también se le conoce con los nombres de: Problema $3n+1$; Cartografía $3x+1$; Algoritmo de Hasse; Problema de Kakutani; Algoritmo de Syracuse; Conjetura de Thwaites y Problema de Ulam.

Para darnos una idea de lo que significa esta conjetura, imaginemos una nube en la que se está formando granizo. Cada una de las bolitas de hielo del granizo presenta una dinámica muy peculiar: describen dentro de esa nube una trayectoria única con un determinado grado de complejidad antes de precipitarse a la superficie terrestre.

Pues bien, cuando formamos alguna secuencia de Collatz, de acuerdo con el procedimiento que este matemático sugirió, resulta que los estudiosos de esta conjetura dicen que existe alguna similitud entre el desarrollo de estas secuencias y el comportamiento de los granizos dentro de la nube. Es por ello que a los elementos de cualquier secuencia de Collatz se les denomina “números granizo”. Esta denominación no significa que los matemáticos estudiosos de estas secuencias estén interesados en algún fenómeno meteorológico, incluido el de la formación de granizo; se trata de una denominación puramente descriptiva.

El verdadero interés por la Conjetura de Collatz es el de las propiedades especiales que presentan los números enteros positivos al ser "expuestos" a las reglas del procedimiento de Collatz consistente en un sencillo algoritmo que subraya la posibilidad de que cualquier número entero positivo, igual o mayor que 3, configure una secuencia que exprese al número "1" (la unidad) como el elemento entero último y límite de su conjunto.

La dificultad al abordar este problema estriba en que cualquier secuencia de Collatz presenta un "desarrollo" la mayoría de las veces aparentemente caótico y por lo tanto irreductible pero que, al final, se "colapsa" en la unidad; momento en el que la secuencia su vuelve periódica. "Caótico" es la otra etiqueta que justifica el uso de la expresión "números granizo" para calificar el desarrollo de la secuencia de Collatz (la llegada a tierra de los granizos es análoga a la llegada de la sucesión al valor "1").

EJEMPLO 1.1 Sea el número 6: el número 6 es par y por lo tanto lo divido entre 2; el cociente resultante es 3, como éste es impar lo triplico y le sumo 1, resulta 10. El número 10 es par; lo divido por 2 y resulta 5. El número 5 es impar; lo triplico y le sumo 1, resulta 16. El número 16 es par; lo divido por dos y resulta 8. El número 8 es par; lo divido por dos y resulta 4. El número 4 es par; lo divido por 2 y resulta 2. El número 2 es par y lo divido por 2, el resultado es 1. Fin del proceso.

Si expresamos el resultado del anterior proceso como un determinado conjunto, sería así: $S_6^1(C) = \{6,3,...,1\}$ que se lee: "la secuencia de Collatz que comienza en 6 y termina en 1 es igual al conjunto $6,3,10,5,16,8,4,2,1$". Los interesados en estas secuencias creen que es útil expresar el número de pasos (iteraciones) que se invirtieron para llegar al número 1; en el anterior ejemplo se invirtieron 8 pasos (el primer elemento no se cuenta por ser el número entero que da inicio a la aplicación del algoritmo). (Nuestros lectores pueden intentar aplicar lúdicamente este procedimiento apoyándose en el uso de alguna calculadora; pueden jugar a ?las carreras de números?: de entre un conjunto de números elegir algunos al azar, apostar al que creamos que será el primero en llegar al número 1).

Algunos han visto en la Conjetura de Collatz una manera diferente de ver el “problema de la detención” propuesto por Alan Türing, pues el problema de la detención se ha revelado "indecidible"[1], o sea que no es posible determinar lógicamente en cuántos pasos, a partir de un determinado número entero, llegará una

[1] En Wikipedia se afirma: "El problema de la parada o problema de la detención para Máquinas de Turing consiste en lo siguiente: dada una Máquina de Turing M y una palabra w, determinar si M terminará en un número finito de pasos cuando es ejecutada usando w como dato de entrada. Alan Turing, en su famoso artículo "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem" (1936), demostró que el problema de la parada de la Máquina de Turing es indecidible, en el sentido de que ninguna máquina de Turing lo puede resolver."

secuencia hasta expresar el número 1; hecho que no es muy alentador para los que se centran en el número de pasos de la aplicación del algoritmo de Collatz hasta llegar a la unidad.

1.2 Plan de trabajo

Nuestro tema de estudio es, pues, la Conjetura de Collatz que podemos enunciar así: todo número entero, al ser sometido a las reglas del Algoritmo de Collatz, generará un conjunto que expresará como elemento último (antes de volverse periódico) la unidad (el número 1).

Recordemos que una conjetura es una hipótesis, en el sentido de esta investigación, una explicación plausible acerca de un fenómeno que de repente nos parece inexplicable; los matemáticos intentan someter las hipótesis al riguroso examen de poderosos procedimientos lógicos (demostraciones) con el fin de determinar su veracidad o falsedad.

En el caso de la Conjetura de Collatz, por ser una hipótesis de "difíciles asideros", debemos encontrar la manera de "acorralar" las posibles excepciones que den al traste con su supuesta veracidad o bien que se determine que no hay excepción alguna y por lo tanto se le dé el "status" de teorema (una verdad matemática).

En este trabajo, a través de un procedimiento sencillo (un algoritmo), intentamos llegar a una expresión que nos permita establecer (intento de "acorralamiento") una razonable relación entre una forma de trabajar exclusivamente con números impares (a la que se le llama "Función de Collatz") y ciertos números que al determinar su raíz cuadrada dan como resultado un número entero (a este tipo de números se les llama "cuadrados perfectos" y fueron estudiados por un matemático llamado Fermat quien descubrió y demostró que al sumarles la unidad a éstos es posible obtener infinitos números primos). Recordemos que los números primos son esenciales para comprender la naturaleza y las relaciones existentes entre los números enteros y son imprescindibles para ocultar (codificar), por motivos de seguridad, información vital para la sobrevivencia de empresas y hasta de Estados Nacionales.

Creemos que con nuestra propuesta es posible mejorar nuestras posibilidades de encontrar alguna posible excepción dentro del conjunto de números que está integrado por los números primos que resultan de sumar un múltiplo de cuatro más la unidad $(4n+1)$ pero no de todos éstos: solamente de aquéllos que a su vez son resultado de la suma de números primos gemelos más la unidad $[(6n\pm 1)_{(\text{primos})}+1=(4n+1)_{(\text{primos})}]$; los números primos gemelos, hagamos memoria, son aquéllos primos que guardan entre sí una distancia de apenas dos unidades y cuya infinitud de su conjunto aún está por ser demostrada.

1.3 Trabajando con módulos.

Una manera de trabajar con una gran cantidad de números a la vez consiste en ordenarlos en líneas y en columnas; de este modo, decimos que cada columna se compone de números que son "congruentes" entre sí porque al dividirlos por algún número dígito (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9) siempre arrojan como resultado el mismo residuo. Al proceder así, decimos que trabajamos con Aritmética Modular. Trabajar por módulos es como pasar los números por un cedazo (coladera, criba) para que solamente queden "atrapados" en nuestra red aquellos números que son útiles para nuestros fines.

Otro recordatorio útil: las secuencias progresan de acuerdo con una razón. Cuando la secuencia es presentada de manera horizontal ésta progresa mediante una y solamente una razón determinada; por ejemplo la secuencia aritmética 2, 4, 6, 8... progresa en razón de dos unidades o sea de "dos en dos" $(2,2)$; o la secuencia geométrica $1,2,4,8,16\ldots$ que progresa en razón de duplicaciones o sea de "doble en doble" $(2n,2n)$. Hay otras secuencias cuya razón es menos intuitiva como la Secuencia de Fibonacci: $1,1,2,3,5,8,13,21\ldots$ o alguna de las secuencias de Collatz.

Ahora bien, cuando se presenta de forma modular cualquier secuencia numérica, se observa que de manera horizontal continúa progresando de acuerdo con su razón específica, pero se agrega la razón con la que crecen todas y cada una de las secuencias de cada una de las columnas (llamémosla "razón vertical"): observemos el siguiente ejemplo que presenta modularmente al conjunto de los números impares precisamente con el que se da inicio en la aplicación de nuestra criba:

Cuadro 1.

El Conjunto de los Números Impares

2→	Conteos de 2 en 2.				
10↓					
Conteos	1	3	5	7	9
de	11	13	15	17	19
10 en 10	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)

Los puntos entre paréntesis representan la infinitud del conjunto de cada columna. Observemos que de manera horizontal la razón es "de dos en dos", en cambio, de manera vertical, los conteos son en razón "de diez en diez".

Sostenemos que, con base en estas razones (la "horizontal" y la "vertical") podemos determinar otra razón derivada de ellas (es decir, una súper razón o "supra/razón") con la que podamos descubrir "propiedades ocultas" (no evidentes) y que nos permita, a su vez, seguir descubriendo relaciones más complejas entre los números de ese conjunto (podríamos decir que deseamos tener una criba que filtre de manera "más fina"). En el caso del cuadro 1, la supra/razón sería la de "dos sobre diez" (2/10) o, en su forma equivalente, la de "uno sobre cinco" (1/5). Para las secuencias que crecen de acuerdo con razones "sencillas" esto no es tan relevante (decimos que esto es trivial) pero para aquéllas que presentan un "comportamiento" más complejo (como la que presentan cualquiera de las secuencias de Collatz que, presumimos, conforman un "conjunto infinito de conjuntos") estas "supra/razones" son vitales.

Por falta de espacio, no podemos mostrar todas la presentaciones modulares resultantes de aplicar nuestra criba (el Algoritmo de Collatz), baste con una descripción mediante los siguientes incisos:

a. Como cada uno de los elementos del cuadro 1 son impares, multipliquémoslos por tres y sumémosles la unidad $(3n+1)$, se obtiene el siguiente Cuadro 1.1:

Cuadro 1.1

El Conjunto de los números pares Resultante de operar con cada uno de los elementos del Cuadro 1 mediante la suma 3n+1.

6→	Conteos de 6 en 6.				
30↓					
Conteos	4	10	16	22	28
de	34	40	46	52	58
30 en 30	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)

b. Se obtiene una nueva presentación modular de números pares (cuadro 1.1), por lo que cada uno de ellos los dividimos por dos?

c. Al hacer esto, resulta otra presentación modular que muestra, de manera alterna, valores pares e impares)?

d. Confeccionamos otra presentación modular tan solo con los impares de este conjunto para seguir aplicando la fórmula 3n+1 y desechemos los pares y se corren los impares para no dejar "huecos" o espacios vacíos?

e. Aplicamos de manera sucesiva el procedimiento descrito desde el "inciso /a/ al /d/" hasta llegar, digamos a la octava representación modular de números impares, (si se quiere, pueden ser más)?

f. Debido a que nos quedamos solamente con las presentaciones modulares que contienen exclusivamente números impares; consideremos el primer elemento de cada una de estas presentaciones modulares y determinemos una nueva sucesión, a saber: $1, 5, 17, 53, 161, 485, 1457\ldots$, como se ve, esta nueva sucesión resultante progresa rápidamente de acuerdo con la razón $3n+2$.

g. Ahora determinemos las distancias entre los elementos de esta sucesión (las distancias entre los elementos de este conjunto se muestran entre paréntesis) y son: 1 (4) 5 (12) 17 (36) 53 (108) 161 (324) 485 (972) 1457... veamos por separado estas distancias: 4, 12, 36, 108, 324, 972... estas diferencias siguen una progresión geométrica de razón 3. Entendemos, de esta manera, que las sucesiones de Collatz son en realidad una manera de presentar progresiones geométricas de razón 3, pero que, al agregarle la unidad, hacemos que se comporten de una manera extraña: mediante términos coloquiales podemos afirmar que el algoritmo propuesto por Collatz "obliga" a las progresiones geométricas de razón 3 a "comportarse" (al agregar la unidad) como una progresión geométrica de razón 2 que se "decrementa" y, por tal motivo, apostamos a que cuando se aplica el mencionado algoritmo, siempre queda al final expresada la unidad (el "1").

h. Retomemos la progresión 1, 5, 17, 53, 161, 485, 1457..., (tengamos presente que cada uno de estos elementos son los que dan inicio a las secuencias que ordenamos en configuraciones modulares de cinco columnas) que puede ser ordenada, a su vez, en columnas mediante el siguiente cuadro 2:

Cuadro 2

Secuencia de los números que dan inicio a las presentaciones modulares de impares

3n+2→	Conteos en función de 3n+2.			
$9^2n+(9^2-1)$ o bien $81n+80\downarrow$	1	5	17	53
O también: conteos en	161	485	1457	4373
función de $81n+80$	13121	39365	118097	354293
	1062881	3188645	9565937	28697813
	(...)	(...)	(...)	(...)

Aquí tenemos valores que al restarles la unidad se convierten en múltiplos de 4. Observamos que los elementos de cada columna progresan en función de la fórmula $81n+80$ y por esa razón los valores sucesivos crecen muy rápidamente.
La razón que expresa este crecimiento horizontal/vertical es $(3n+2)/(81n+80)$, una "supra/razón" que señala el límite de la expresión $3n+1$[2].

[2]"Relation to C(n) = Collatz function iteration using only odd steps: If we look for record subsequences where C(n)>n, this subsequence starts at 2^n-1 and stops at the local maximum of $2*3^n-1$. Examples: [3,5],[7,11,17],[15,23,35,53],...,[127,191,287,431,647,971,1457],... - Lambert Klasen (lambert.klasen(AT)gmx.net), Mar 11 2005."

i. Al aplicar la función $3n+1$ a los valores del anterior cuadro 2, obtenemos el siguiente nuevo cuadro 3:

Cuadro 3

$3n+4 \rightarrow$	Conteos en función de $3n+4$.			
$9^2n+2(9^2-1)$ o bien $81n+160 \downarrow$	4	16	52	160
O también: conteos en función de $81n+160$	484	1456	4372	13120
	39364	118096	354292	1062880
	3188644	9565936	28697812	86093440
	(...)	(...)	(...)	(...)

Reparemos en el hecho de que (al dividir entre dos los elementos de cada columna del anterior cuadro 3) siempre obtendremos números pares; esto significa que nuestro procedimiento ha encontrado un límite debido a que no encontramos cociente impar alguno; en otras palabras: los elementos del anterior cuadro 3 son múltiplos de cuatro y al dividirlos por dos ya no expresarían de manera alternada valores pares e impares; solamente obtendríamos números pares. De querer seguir, tendríamos que dividir estos elementos entre cuatro para que alguno de ellos exprese un cociente impar; debido a que esto rebasa nuestro algoritmo, debemos detenernos aquí[3].

Así, los elementos de los cuadros 2 y 3, crecen según las supra/razones $(3n+2)/(81n+80)$ y $(3n+4)/(81n+160)$ respectivamente.

j. Ahora operemos con la primera supra/razón inmediatamente arriba expuesta $(3n+2)/(81n+80)$ (con la misma que crecen los elementos del cuadro 2) considerando los valores de la sucesión de números impares 1, 3, 5, 7... (con los que dio inicio nuestra aplicación) y con ella configuremos un cuadro como el siguiente:

Cuadro 4

Valores asociados a la razón $3n+2/81n+80$ para ($n \geq 1$) impares												
"n" impares	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	(...)
Horizontal $3n+2$	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	(...)
Vertical (columnas), ahora presentadas de manera horizontal $81n+80$	161	323	485	647	809	971	1133	1295	1457	1619	1781	(...)

En este cuadro la sucesión 3n+2 progresa de 6 en 6.

En cambio la sucesión: $161, 323, 485, 647, 809, 971, 1133, 1295, 1457, 1619, 1781\ldots$, es más compleja en cuanto a su crecimiento pues obedece a una ecuación especial conocida como "Ecuación de Pell" (o, para ser justos, Ecuación de Brouncker) y que, coloquialmente plantea la pregunta: cuáles son los cuadrados perfectos, uno de los cuales es multiplicado por un número no cuadrado perfecto, cuya diferencia es la unidad? Vincenzo Librandi afirma: "si $A = [A157953] 81 \cdot n.^2 - n$ [sic] $(80, 322, 726, ,.,)$; $Y = [A010857]$ $18(18, 18, 18, ,.,)$; $X = [A157954]$ $162 \cdot n - 1(161, 323, 485, .,)$, tenemos, para todos los términos, la ecuación de Pell[4] $X^2 - A \cdot Y^2 = 1$.

[3] Ver [4]. Para los lectores interesados, se les propone que intenten encontrar números primos de la forma $4n+1$ sumándoles la unidad a cada uno de esos valores $(4n+1)$. Recordemos que este tipo de primos (estudiados por Fermat) se asocian a los "cuadrados perfectos" que a su vez se asocian a los números primos gemelos.

[4] Ver [3]

EJEMPLO 1.2 $161^2 - 80 \cdot 18^2 = 1; 323^2 - 322 \cdot 18^2 = 1; 485^2 - 726 \cdot 18^2 = 1. \quad (4)$

Como podemos observar nuestra razón $(3n+2)/(81n+80)$ relaciona, por un lado, la función $C(n)$ que, como vimos, es una función iterativa de Collatz que solamente aplica a números impares y, por el otro lado, con los cuadrados perfectos a través de la ecuación de Pell/Brouncker; pero aún más importante: relaciona los valores de $81n+80$ con la "unidad" (el número "1") tan relevante para la veracidad de la conjetura de Collatz.

k. Consideremos ahora las razones presentadas en el cuadro 4: $5/161$; $11/323$; $17/485$; $23/647$; $29/809$; $35/971$; $41/113$ Notamos que tanto los numeradores como los denominadores son números de la forma $6n-1$; es decir, que si les agregamos la unidad son divisibles por 6 tal y como se muestra en el siguiente cuadro 5.

Cuadro 5

Razones generales	Secuencias de las razones que muestran la relación íntima con los números de la forma $6n-1$.							
n/d	11/323	17/485	23/647	29/809	35/971	41/1133	47/ 1295	(...)
$(n+1)/(d+1)$	12/324	18/486	24/648	30/810	36/972	42/1134	48/1296	(...)
$\frac{n+1}{6} \Big/ \frac{d+1}{6}$	2/54	3/81	4/108	5/135	6/162	7/189	8/216	...)

También observamos que tanto los numeradores como los denominadores son números de la forma $4n \pm 1$, alternándose los valores $-1, +1$, en la secuencia. Veamos el siguiente cuadro 6.

Cuadro 6

Razones generales	Secuencias de las razones que muestran la relación íntima con los números de la forma $4n \pm 1$.							
n/d	5/161	11/323	17/485	23/647	29/809	35/971	41/1133	47/ 1295	(...)
$n \pm 1;\ d \pm 1$	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	(...)
$(4n \pm 1)/(4d \pm 1)$	4/160	12/324	16/484	24/648	28/808	36/972	40/1132	48/1296	(...)
$\frac{4n \pm 1}{4} \Big/ \frac{4d \pm 1}{4}$	1/40	3/81	4/121	6/162	7/202	9/243	10/283	12/324	(...)

Esto cuadros en conjunto nos dicen que hay valores que son tanto de la forma $6n-1$ como de la forma $4n+1$ y nos llevan a sospechar que de haber alguna excepción a la conjetura de Collatz, ésta debiera buscarse en el conjunto de los números primos de la forma $4n+1$ o primos que son resultado de sumar dos cuadrados perfectos[5], pero no en cualquiera de este tipo de números primos sino en aquéllos y solamente aquéllos que son resultado de la suma de dos primos gemelos más la unidad, o bien, de manera genérica:

$$(6n \pm 1)_{(\text{primos})} + 1 = (4n+1)_{(\text{primos})}.$$

EJEMPLO 1.3 $(5+7)+1 = 13; \qquad (17+19)+1 = 37\ldots$[6]

[5]Fermat se interesó en este tipo de números y demostró que los primos de la forma 4n+1 son resultado de la suma de dos cuadrados perfectos y son infinitos.

[6]En "hojamat.es" ([5]) encontramos:

(...)

– Todo número primo mayor que 3 es de la forma 6n+1 o de la forma 6n-1

En este trabajo nos hemos centrado en la tarea de señalar en dónde hay que buscar alguna excepción a la Conjetura de Collatz, si es que la hay; sin embargo, bajo riesgo de parecer aún más ingenuos en nuestras afirmaciones, sospechamos que no hay excepción alguna en esta conjetura y que, por lo tanto, es verdadera.

En el artículo que presentamos para la revista Aleph Zero (hosting.udlap.mx) Fibonacci y las Tarjetas de Crédito[7] sugerimos una alternativa para mejorar la seguridad de las tarjetas de crédito; en ese lugar observamos que la suma exhaustiva de los dígitos de cualquier número tenía como límite alguno de los elementos del conjunto de los números dígitos y propusimos las siguientes secuencias a partir de esos límites (ver el siguiente cuadro 7).

Cuadro 7

Secuencias para números de control de tarjetas de crédito cuyas sumas exhaustivas terminan en algunos de los números dígitos

Números dígitos resultado de las sumas exhaustivas de los dígitos de un determinado número	Números de control
1	1124875
2	224875124875
3	3363
4	44875124875
5	55124875
6	6636
7	775124875
8	8875124875
9	9999

Básicamente estos “números de control” (nc), del cuadro 7, se obtienen mediante un procedimiento sencillo que combina la suma exhaustiva de los dígitos de un número y la secuencia de Fibonacci, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo para obtener el “nc” del número 1 del cuadro de arriba:

EJEMPLO 1.4 1 es 1, por lo tanto 11; 1 más 1 es igual a 2, por lo tanto 112; $1+1+2=4$; por lo tanto 1124...
$1+1+2+4=8$, por lo tanto ...
11248; $1+1+2+4+8=16$, $1+6=7$, por lo tanto...
112487; $1+1+2+4+8+7=23$, $2+3=5$, por lo tanto...
1124875; $1+1+2+4+8+7+5=28$, $2+8=10; 1+0=1$, por lo tanto...

– Todo número primo mayor que 2 es de la forma 4n+1 o de la forma 4n-1
– Un número primo tiene las siguientes propiedades respecto a una suma de cuadrados:
a. Un número primo es suma de cuadrados de dos números naturales si y sólo si es de la forma 4n+1.
b. El producto de dos números que son suma de cuadrados también es otra suma de cuadrados, en virtud de la identidad c. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$
d. Por tanto el producto de potencias de números del tipo 4n+1 también equivale a una suma de cuadrados.
e. Si una suma de cuadrados se multiplica por otro cuadrado, resulta una nueva suma de cuadrados:
f. $(a^2+b^2)c^2=(ac)^2+(bc)^2$
g. De las propiedades anteriores se deduce que son suma de cuadrados los números que contienen factores primos del tipo 4n+1 y factores de otro tipo cualquiera pero con potencia par.

[7] Ver Verhttp://hosting.udlap.mx/profesores/miguela.mendez/alephzero/archivo/historico/az56/credito56.html (visita del 20 de junio de 2010 a las 21:30 hrs.)

11248751. Fin.

Exceptuando a los números dígito 3, 6 y 9, a partir del dígito 5 de los "números de control" se vuelven periódicos desde el "1" como en la llamada secuencia de Pitoun[8] $(1,1,2,4,8,7,5,1,2,4,8,7,5,1,2,4,8,7,5,1,2,4,8,7,5,1\dots)$
Ahora observemos algo: la secuencia de Collatz que genera, por ejemplo, el número 7 es: $7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5$
Por lo menos los siete últimos elementos que subrayamos de esta secuencia se identifican de manera regresiva con $1248751\dots$ Pues $(10) \longrightarrow 1+0=1$; $(5) \longrightarrow 5$; $(16) \longrightarrow 1+6=7$; $(8) \longrightarrow 8$; $(4) \longrightarrow 4$; $(2) \longrightarrow 2$ y por último $(1) \longrightarrow 1$

Puestas en orden, las implicaciones quedarían así: $1,5,7,8,4,2,1$ que son imagen de 1248751 pero sin comas. Creemos que el siguiente planteamiento de Bos y Sands ([7]) de la Universidad de Calgary asocian estas implicaciones y su imagen con la posible veracidad de la Conjetura de Collatz, (en la fuente se proponen varias soluciones pero nosotros solamente presentamos una de ellas por su relación con nuestro estudio; los subrayados son nuestros):

> 1540. [1990: 110] Proposed by Len Bos and Bill Sands, University of Calgary. For k a positive odd integer, define a sequence $< a_n >$ by: $a_0 = 1$ and, for $n > 0$
>
> $$a_n = \begin{cases} a_{n-1}+k & \text{if} \quad a_{n-1} \quad \text{is odd} \\ \\ a_{n-1}/2 & \text{if} \quad a_{n-1} \quad \text{is even} \end{cases}$$
>
> and let $f(k)$ be the smallest $n > 0$ such that $a_n = 1$. Find all k such that $f(k) = k$
> In general, once we prove that $g(k)$ is finite for every positive odd integer k, then we shall have that $f(k) = g(k) + card\{odd\ t_i : 0 \leq i \leq g(k)\}$. We shall show that the coincidence between the sequence $< t_n >$ (reversed) and the sequence of residues of the 2^n's modulo k, for example,
> $< 2^n\ modulo\ 15 >$: $1;2;4;8;1\dots$
> $< 2^n\ modulo\ 13 >$: $1;2;4;8;3;6;12;11;9;5;10;7;1\dots$
> $\underline{< 2^n\ modulo\ 9 >: 1;2;4;8;7;5;1\dots}$
> is not accidental. In fact we can prove that, for every odd $k > 1$ (already excluding the case $k = 1$, for which $f(1) = 2$), we have:
> (a) $t_n < k$ for all n;
> (b) $2^n t_n \equiv\ 1\ mod\ k$ for all n; and so
> (c) if h is a positive integer such that $2^h \equiv\ 1\ mod\ k$, then $t_n \equiv 2^{h-n}\ mod\ k$ for $n \leq h$, and so the period of the sequence $< t_n >$ is $g(k) =\ min\{h > 0 : 2^h \equiv\ 1\ mod\ k\}$ (:= the order of 2 mod k):

Básicamente este planteamiento lo que propone es trabajar con módulos para definir secuencias cuando una determinada variable es un número impar o par; pero resaltemos el parecido sorprendente de este planteamiento de Bos y Sands con la Cartografía $3x+1$ (la Conjetura de Collatz) y más aún sorprendente es (por lo menos para nosotros) la solución que ofrece para $< 2n$ modulo $9 >$: $1;2;4;8;7;5;1\dots$

Podemos concluir que la Conjetura de Collatz es una de las hipótesis más sencillas de plantear pero, al igual que otras, muy difíciles de demostrar pues enlaza por lo menos con otros dos planteamientos aún sin resolver: la Conjetura Binaria de Goldbach y la Infinitud del Conjunto de Números Primos Gemelos.

[8] Ver [6]

Bibliografía

[1] A. Turing. “"On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”. En http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_la_parada. Visita del 10 de junio de 2010 a las 15:20 horas.

[2] C. Kimberling (ck6(AT)evansville.edu). En http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html. Visitada del 12 de junio a las 15:15 horas.

[3] V. Librandi (vincenzo.librandi(AT)tin.it), Mar 10 2009. En http://www.research.att.com/~njas/sequences/A157954. Visitada del 12 de junio de 2010 a las 16:35 horas.

[4] M. Manzo. “Replanteamiento de la Conjetura de Goldbach”. En http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesV8_n1_2007/Replanteamiento_de_la_Conjetura/index.html. Visitada del 11 de junio de 20010 a las 17:00 horas.

[5] Hojamat. Consultarhttp://hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/teoria/teordivi.htm. Visitada del 20 de junio de 2010 a las 20:00 hrs.

[6] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. http://oeis.org/A029898.

[7] R.E. Woodrow. “The Olimpiad Corner”. En revista Crux Mathematicorum (vol.17, núm. 1, enero 1991). En http://pds13.egloos.com/pds/200904/04/93/a0100793_crux1991-all.pdf. Visitada del 20 de junio de 2010 a las 23:40 hrs.