



Kurú: Revista Forestal (Costa Rica) 6(16), 2009

NOTA TÉCNICA

Modelo de regresión para estimar el volumen total con corteza de árboles de *Pinus taeda* L. en el sur de Brasil

Thiago Augusto da Cunha¹
César Augusto Guimarães Finger¹

Resumen

Se probaron quince modelos de regresión de una y doble entrada para la estimación del volumen total con corteza de *Pinus taeda* L. seleccionando el modelo que mejor se ajustó a los datos utilizados; a saber, determinar el volumen de cada árbol por el método analítico y por el método de muestreo con área fija. Para el estudio fueron evaluados cuarenta árboles distribuidos en cuatro clases diamétricas de un rodal de *P. taeda*, en la Universidad Federal de Santa María, Ciudad de Santa María, en el Departamento de Río Grande do Sul, Brasil. En cada uno de estos árboles fueron medidas las siguientes variables dendrométricas: altura total (m), diámetro a la altura del pecho (cm) y diámetros sobre el fuste medidos cada dos metros obtenidos mediante lecturas con el relascope de Bitterlich modelo Wide Scale. Fueron probados un total de quince modelos matemáticos de regresión de entrada simple y doble, los cuales fueron seleccionados por medio del menor valor ponderado de los resultados de los parámetros estadísticos seleccionados y el análisis gráfico de los residuos. El resultado reveló que todos los modelos probados presentaron buen ajuste, obteniéndose coeficientes de determinación ajustados con valores entre 0.982 a 0.996, lo cual indica que cualquier modelo puede ser utilizado. El modelo propuesto por Spurr (variable combinada) fue el seleccionado por presentar mayor facilidad de uso y mejor representación de la distribución gráfica de los residuos.

Palabras claves: Modelos de regresión, Volumen total con corteza, *Pinus taeda*, Río Grande Do Sul, Brasil.

Abstract

Regression model to estimate total tree volume including bark for *Pinus taeda* L. in south Brazil. Fifteen one and double entrees regression models for total volume (including bark) assessment for *Pinus taeda* L. were tried, selecting the best fitted model for the utilized data, to know, to determine each tree volume by analytical method and by fix area sampling method. Forty (40) trees distributed in 4 diametric classes from a *Pinus taeda* stand at the Universidad Federal de Santa María, Santa María city, Río Grande do Sul Departament, Brazil, were evaluated. For each tree the following dendrometric variables were obtained: Total height (m), diameter at breast height (cm), and bole diameter measured each 2 m using a Wide Scale model Bitterlich mirror relascope. Fifteen (15) simple and double entrees regression models were tried which were selected by means of the lower

¹ Universidade Federal de Santa Maria, Brasil, etsfor@yahoo.com, cesar.finger@usmail.ufsm.br

weighted value from the measured statistical parameters and the graphic analysis of the residuals. Results showed that all tried models were well fitted, obtaining correlation coefficients ranging from 0.982 to 0.992, indicating that any model can be used. Spurr's (combined variable) proposed model was chosen because its use easiness and better representation of the graphic distribution of the residuals.

Key words: Models of regression, Total volume with bark, *Pinus taeda*, Río Grande Do Sul, Brasil.

INTRODUCCIÓN

El volumen es la variable que indica en unidades de metros cúbicos (m^3) la cantidad de madera contenida en árboles. En un rodal puede considerarse como la suma de los volúmenes de los árboles en pie. En consecuencia, una forma de acceder al conocimiento del volumen de madera de un rodal es a través del conocimiento del volumen de sus árboles individuales y una herramienta para determinar ese volumen son los modelos matemáticos de regresión por medio de las tablas de volumen.

Desde su aparición, las tablas de volumen se han constituido en una herramienta importante a la hora de cuantificar la producción y rendimiento de una superficie boscosa y/o rodal, en cuanto al volumen de madera existente para una o más especies, por lo tanto, es útil para valorar económicamente un área boscosa (Villarroel, 1994).

La tabla de volumen es una presentación en forma tabular que muestra el volumen promedio de árboles en pie de distintas dimensiones, obtenido a partir de relaciones previamente establecidas, donde el diámetro, altura y forma de fuste son la información utilizada para el cálculo (Dauber, 2001).

Hoy día, las tablas de volumen han sido reemplazadas por las ecuaciones de volumen, es decir, por modelos matemáticos capaces de representar el volumen medio de madera por árbol a partir de las variables independientes antes mencionadas. Sin embargo, el término de "tabla de volumen" ha persistido como un término genérico para expresar una tabla derivada de una ecuación de volumen.

Varios investigadores ajustaron y compararon diversas funciones matemáticas que expresan el volumen, para diferentes especies, sitios y régimen de manejo. En el caso de especies del género *Pinus* se tienen entre otros a Schneider (1984), quien calculó el volumen con corteza de *Pinus elliotii*; Machado *et al.* (2002), modeló el volumen de *Pinus oocarpa* en diferentes edades y régimen de raleo; y Santana y Encinas (2004), desarrollaron ecuaciones de volumen para *P. taeda*.

Con el afán de complementar información en la línea de investigación de los temas y autores antes citados, se presenta a continuación un trabajo que tiene como objetivo ajustar y validar un modelo matemático por medio del método de regresión, que exprese el volumen total de madera con corteza de árboles de *P. taeda* L. todo en función de variables de fácil medición, como son el diámetro a la altura del pecho (dap) y altura total, esto aplicado en la comparación de volúmenes obtenidos por el método de parcela de área fija y por el muestreo por conteo angular de Bitterlich (Loet *et al.*, 1973), ejecutado en el sur de Brasil.

MATERIALES Y MÉTODOS

Área de estudio

El estudio se llevó a cabo en un rodal de *P. taeda* L. ubicado en el área experimental de la Universidad Federal de Santa María en la ciudad de Santa María, Departamento de Río Grande do Sul, Brasil. La localización según las coordenadas planas en el sistema UTM son: 6709500 m al Norte y 236500 m al Este (Figura 1).

Según la clasificación de Köppen, la región de Santa María se localiza en una región del tipo "Cfa 2", subtropical húmedo, que se caracteriza por presentar lluvias durante todos los meses del año y posee una temperatura media anual de 19°C, oscilando durante el año entre 22°C y 3°C (Moreno, 1961).

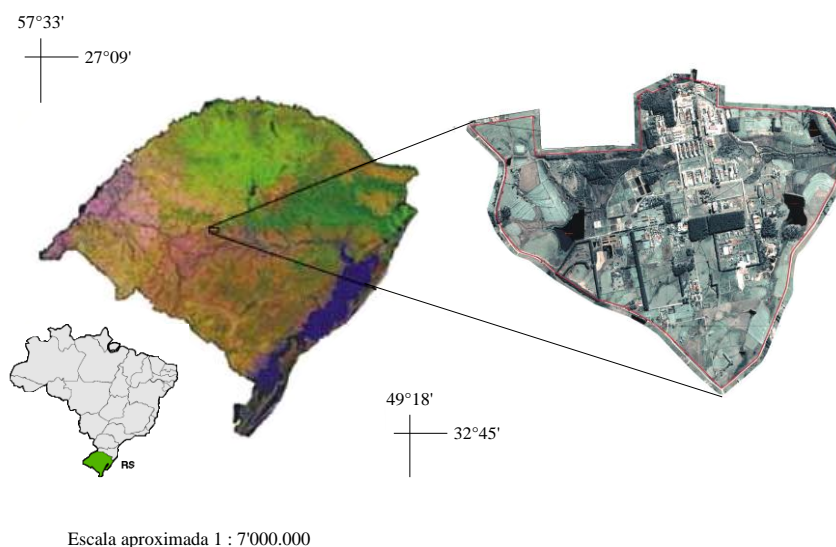


Figura 1. Localización del área de estudio, en la Universidad Federal de Santa María, Ciudad de Santa María, en el Departamento de Río Grande do Sul, Brasil.

Información del rodal

El rodal de *P. taeda* tiene un área de 2.1 ha. Fue plantado en el año 1995 con el propósito de recuperar un área de depósito de basura; se estableció con un espaciamiento de 3 x 2 m (6 m²/árbol) y no se le ha dado ninguna intervención silvicultural de poda o raleo (Figura 2).



Figura 2. Vista del rodal de *P. taeda*, plantación donde se realizó el estudio.

Diseño de la investigación

Para realizar la investigación se procedió a determinar el tamaño del diámetro de los árboles en el rodal, posteriormente se definieron 4 clases diamétricas y para cada una de estas clases se eligieron aleatoriamente una muestra representativa de 10 árboles. A cada árbol seleccionado se le colocó una placa con su debida numeración para su identificación, localización y medición.

Se hizo una medición directa del diámetro en dos puntos, uno a 0.2 m. sobre el nivel del suelo ($d_{0,2}$); y el otro a la altura del pecho (dap), es decir, a 1.3 m sobre el nivel del suelo ($d_{1,3}$). Ambas medidas se realizaron con cinta diamétrica. Para complementar el estudio se hizo otra medición, en este caso indirecta, utilizando el relascopio de espejo de Bitterlich (modelo Wide Scale). Estas lecturas (medición de los diámetros superiores) se hicieron cada dos metros ($d_2, d_4, d_6, d_8, d_{10}, d_{12}, d_{14}$) y para mejor precisión de las lecturas de los datos se montó el relascopio sobre un trípode (Figura 3).

La lectura de los diámetros superiores con el relascopio fue realizada desde una distancia horizontal fija de ocho metros (desde el ocular del aparato hasta el centro del árbol). Esta distancia fue obtenida mediante la utilización del hipsómetro Forestor Vertex II y un "transponder" que fue fijado al árbol para emitir las ondas de ultrasonido, de manera que resultaran lecturas de distancias horizontales corregidas para la pendiente y alturas (Figura 3).

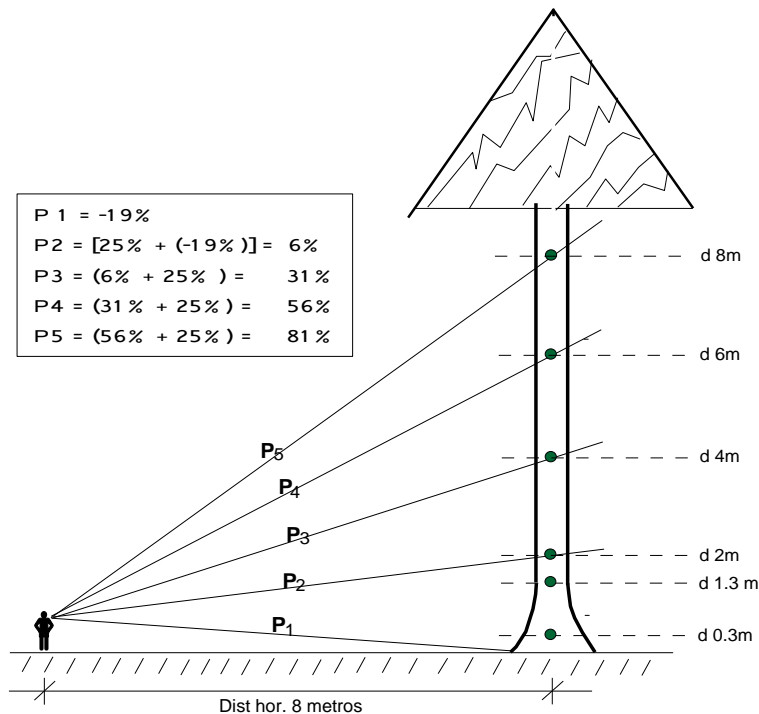


Figura 3. Metodología empleada para la lectura de diámetros superiores a lo largo del fuste, utilizando el relascopio de espejo de Bitterlich.

Cada diámetro superior ($d_2 \dots d_n$) obtenido mediante la utilización del relascopio de Bitterlich, se obtiene mediante la aplicación de la siguiente ecuación:

$$d_i = \frac{a_i \times U.R.}{50}$$

donde:

d = diámetro

a_i = distancia horizontal entre el centro del árbol y el ocular del relascopio

$U.R.$ = unidad relascópica (número de bandas que cubre el diámetro).

Cálculo del volumen total con corteza

Para la obtención del volumen total con corteza individual (de cada árbol), se aplicó la ecuación:

$$V_{tcc} = v_0 + \sum_{i=1}^n v_i + v_c$$

donde:

V_{tcc} = volumen (m^3) total con corteza

v_0 = volumen (m^3) del tocón, considerando el fuste desde el nivel del suelo hasta 0.3 m de altura

v_i = volumen (m^3) de las secciones intermediarias

v_c = volumen (m^3) de la punta superior del árbol (cono)

Para la obtención del volumen del tocón y de cada sección intermedia, fue empleado el método de Smalian, que consiste en tomar la lectura del diámetro en ambas extremos o puntas. La fórmula de manera detallada es:

$$v_i = \sum_{i=1}^n \frac{g_i + g_{i+1}}{2} L_i$$

donde:

v_i = volumen (m^3) de las secciones intermediarias

g_i = Área basal (m^2) en el extremo mayor de la troza = $d_1^2 * \pi/4$

g_{i+1} = Área basal (m^2) en el extremo menor de la troza = $d_{i+1}^2 * \pi/4$

L_i = largo (m). En el caso del tocón los diámetros se midieron cada 0.2 m y para las secciones intermedias las lecturas de los diámetros fueron cada 2 m.

Para la obtención el volumen (v_c) de la punta superior del árbol (cono), se empleó la siguiente formula:

$$v_c = g_n \times L_n \times \frac{1}{3}$$

donde:

v_c = volumen (m^3) de la punta superior del árbol

g_n = área basal del cono (m^2)

L_n = largo del cono (m)

Ecuaciones probadas para la estimación del volumen total

Para encontrar una relación matemática se correlacionaron el volumen total de los árboles, en función del diámetro de referencia (dap) y la altura total y el volumen total con corteza, obtenido mediante lecturas de diámetros superiores del fuste. Fueron probados y seleccionados los modelos de regresión de diferentes números de variables independientes (ver Cuadro 1).

Cuadro 1. Compilación de las ecuaciones de volumen más importantes que fueron probadas para la estimación del volumen total con corteza con base en datos de cubicación.

Variable Independiente	Designación (Autor)	Modelo Matemático para Estimación del Volumen	
D	1. Kopecky - Gehrhardt	$v = \beta_0 + \beta_1 d^2 + \varepsilon$	Modelos de una entrada
	2. Dissescu - Meyer	$v = \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \varepsilon$	
	3. Hohenadl - Krenn	$v = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \varepsilon$	
	4. Berkhout	$v = \beta_0 d^{\beta_1} + \varepsilon$	
	5. Hummel	$v = \beta_0 + \beta_1 g + \varepsilon$	
	6. Brenac (log form)	$\ln v = \beta_0 + \beta_1 \ln \bar{d} + \beta_2 \frac{1}{d} + \varepsilon$	
d, h	7. Spurr. (var. Combinada)	$v = \beta_0 + \beta_1 d^2 h + \varepsilon$	Modelos de doble entrada
	8. Hohenadl-Krenn	$v = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 h + \varepsilon$	
	9. Stoate	$v = \beta_0 + \beta_1 d^2 + \beta_2 d^2 h + \beta_3 h + \varepsilon$	
	10. Näslund	$v = \beta^1 d^2 + \beta^2 d^2 h + \beta^3 dh^2 + \beta^4 h^2 + \varepsilon$	
	11. Meyer	$v = \beta^0 + \beta^1 d + \beta^2 d^2 + \beta^3 dh + \beta^4 d^2 h + \varepsilon$	
	12. Meyer (Mod.)	$v = \beta^0 + \beta^1 d + \beta^2 d^2 + \beta^3 dh + \beta^4 d^2 h + \beta^5 h + \varepsilon$	
	13. Spurr. (Log form)	$\ln v = \beta_0 + \beta_1 \ln d^2 h + \varepsilon$	
	14. Schumacher-Hall	$\ln v = \beta_0 + \beta_1 \ln d + \beta_2 \ln h + \varepsilon$	
	15. I. B. W. Alemanha	$\ln v = \beta_0 + \beta_1 \ln d + \beta_2 \ln^2 d + \beta_3 \ln h + \beta_4 \ln^2 h + \varepsilon$	

Fuente: Spurr (1952), Prodan (1968), Loetsch *et al* (1973), Schneider (1984).

Donde:

v = volumen total con corteza

d = diámetro de referencia

h = altura total

g = área basal

β_0, β_1 = coeficientes de regresión paramétricos

ε = error o variación no explicada por la regresión \cong NIID $(0, \sigma^2)$

\ln = logaritmo natural de base e.

Criterios de selección de los modelos matemáticos y análisis estadístico

La determinación y selección de modelos de regresión, normalmente se realiza en tres fases distintas según Loetsch *et al.* (1973):

- Selección de un número de árboles, muestras suficientes y representativas;
- Medición de las variables dependientes e independientes;
- Selección del mejor modelo de regresión.

Para la selección del modelo matemático que mejor ajuste los datos observados y estimados (predichos), se siguieron estos pasos:

- Se analizó el ajuste de cada uno de los modelos de forma comparativa, observándose los criterios estadísticos dados por el coeficiente de determinación ajustado, el error estándar de la estimación, el coeficiente de variación, el valor de F de Snedecor y la ponderación de estos valores.
- En un segundo paso se realizaron las pruebas requeridas para determinar la validez del modelo previamente seleccionado como el mejor.
- Las variables de entrada diámetro a la altura del pecho y altura total observadas y el volumen total con corteza calculado, fueron procesados en el paquete estadístico SAS System V8 (SAS Institute, 2009), donde los modelos matemáticos de regresión fueron ajustados con el Procedimiento Reg (Proc Reg).

Coeficiente de determinación ajustado ($R^2_{Aj.}$)

El coeficiente de determinación (R^2) expresa la cantidad de variación total explicada por la regresión. Debido a que el coeficiente de determinación aumenta a medida que se incluye una nueva variable independiente al modelo matemático, se decidió usar el coeficiente de determinación ajustado ($R^2_{Aj.}$), para cumplir con modelos de diferente número de coeficientes de regresión y variable dependiente modificada (logaritimizados) como criterio de selección, obtenido por la expresión:

$$R^2_{Aj.} = R^2 - \left[\frac{K - 1}{N - K} \right] \times (1 - R^2)$$

donde:

$R^2_{Aj.}$ = coeficiente de determinación ajustado

R^2 = coeficiente de determinación

K = número de variables independientes del modelo

N = número de observaciones.

Error estándar de la estimación

El error estándar de la estimación indica la disparidad o dispersión entre los valores observados y estimados por la regresión, siendo deseable aquel que posee el menor valor. Este valor también mide la precisión del ajuste del modelo matemático y solamente debe ser utilizado como comparador cuando las variables dependientes presenten las mismas unidades de medida. Meyer (1938) citado por Hosokawa y Souza (1989), presentó un error estándar de la estimación, en porcentaje, como alternativa para la comparación de modelos con variables dependientes de diferentes unidades.

El error estándar de la estimación (S_{yx}) y el error estándar de la estimación en porcentaje son obtenidos por medio de las fórmulas:

$$S_{yx} = \sqrt{CM_{res.}}$$

$$S_{yx} \% = \frac{S_{yx}}{\bar{Y}} \times 100$$

donde:

S_{yx} = error estándar absoluto de la estimación

$CM_{res.}$ = cuadrado medio del residuo, obtenido en el análisis de varianza

$S_{yx} \%$ = error estándar en porcentaje

\bar{Y} = media aritmética de las variables dependientes.

Para los modelos logarítmicos, el error estándar de la estimación fue corregido en la escala original de la variable dependiente, para posibilitar la comparación con los modelos aritméticos. Esta corrección fue obtenida con el índice de Furnival (Furnival, 1961) y para los modelos logarítmicos es dado por:

$$IF = EXP \left[\frac{\sum_{i=1}^n Ln(Vreal_i)}{n} \right] \times S_{yx}$$

La forma porcentual del índice de Furnival se expresa por:

$$IF \% = \frac{IF}{\bar{Y}} \times 100$$

donde:

IF = índice de Furnival

$IF\%$ = índice de Furnival en porcentaje

\bar{Y} = media aritmética de la variable dependiente

V_{real} = volumen individual real en m^3

S_{yx} = error estándar de la estimación

n = número de árboles muestreados (muestra).

El índice de Furnival de un modelo logarítmico debe ser comparado con el error estándar de la estimación del modelo aritmético. También cabe la posibilidad de comparar el índice de Furnival en porcentaje ($IF\%$) del modelo logarítmico con el coeficiente de varianza del modelo aritmético.

Coeficiente de variación

El coeficiente de variación ($CV\%$) es la expresión del error relativo de la media y es obtenido por la fórmula:

$$CV \% = \left(\frac{S_{yx}}{\bar{Y}} \right) \times 100$$

donde:

$CV\%$ = coeficiente de variación en porcentaje

S_{yx} = error estándar de la estimación

\bar{Y} = media aritmética de la variable dependiente.

El coeficiente de variación es útil para seleccionar modelos que presentan variables independientes transformadas. De esta manera, fue seleccionado el modelo matemático que presentó el menor valor de coeficiente de variación.

Valor de la distribución F de Snedecor

El valor de F calculado en el análisis de variancia de los modelos fue utilizado como un estadístico en la determinación del valor ponderado, para la selección del mejor modelo matemático.

El valor de F calculado es obtenido por la relación entre el cuadrado medio de la regresión y el cuadrado medio del error del residuo:

$$F_{calculado} = \frac{CMR}{CME}$$

donde:

CMR = cuadrado medio de la regresión

CME = cuadrado medio del error.

Valor ponderado (VP)

Este criterio de selección de la ecuación tuvo en consideración todos los estadísticos anteriormente descritos. Este estadístico fue utilizado con el objetivo de sintetizar los resultados, facilitando el proceso de selección del mejor modelo matemático.

El valor ponderado (VP) fue determinado atribuyéndose valores o pesos a las estadísticas calculadas. En este proceso, las estadísticas fueron ordenadas de acuerdo con su eficiencia, siendo atribuido el peso 1 a la ecuación más eficiente y pesos crecientes para las demás ecuaciones.

El valor ponderado de una ecuación fue obtenido por la multiplicación del número de veces que fue cuantificado para cada puesto por su respectivo peso, siendo expresado por:

$$VP = \sum_{i=1}^n Nr_i \times P_i$$

donde:

P_i = peso del i-ésimo puesto

Nr_i = números de registro que obtuvieron el i-ésimo puesto

VP = valor ponderado de la ecuación.

La ecuación seleccionada fue la que presentó el menor valor ponderado de los resultados estadísticos determinados.

Distribución gráfica de los residuos

El análisis gráfico de los residuos fue realizado por medio de la observación de su distribución contra los valores de las estimaciones, conforme lo propone Bussab (1986). En este método, los desvíos fueron gráficamente distribuidos en un sistema de ejes ortogonales: en el eje de la ordenada los desvíos fueron centrados en cero, y el eje de la abscisa por la variable dependiente observada.

El valor de los residuos fue calculado por medio de la fórmula:

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$$

donde:

\hat{e}_i = residuo de la i-ésima observación

y_i = variable dependiente observada

\hat{y}_i = variable dependiente estimada por la regresión.

El análisis permite detectar posibles tendencias de ajuste a lo largo de la línea de regresión para ser tomadas en cuenta en la decisión del uso o no uso del modelo.

Se consideró como una distribución mala de los residuos: a) la formación de patrones de distribución con transgresiones en la concentración de los residuos arriba o abajo del eje de las estimaciones, y b) su concentración en hasta 2 quintos de la amplitud del mismo eje. Se consideró como una distribución buena de los residuos: la distribución de los residuos en 3 a 4 quintos de la amplitud del eje de la estimación de forma equitativa arriba y abajo del mismo eje y sin formación de patrones. Solamente fue considerada óptima la distribución de los residuos en más de 4 quintos de la amplitud del eje de la estimación, equitativamente arriba y abajo del eje y sin formación de patrones.

Validación del modelo de regresión

Las pruebas utilizadas para la validación del modelo de ecuación de regresión fueron realizadas con el programa SAS System V8 (SAS Institute, 1999).

Para determinar el cumplimiento de los supuestos de homogeneidad de varianzas, independencia de residuos y normalidad de la distribución, se llevaron a cabo las siguientes pruebas:

- La homogeneidad de varianzas: test de X^2 de White;
- La independencia de los residuos: test de Durbin-Watson;
- La normalidad de la distribución de los residuos: test de Shapiro-Wilk.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El volumen observado obtenido de los 40 árboles fue de 8.6 m³ con una media de 0.22 m³ y error estándar de la media igual a 0.11 m³ (la dispersión absoluta de la media), con un valor mínimo de 0.05 m³ y valor máximo de 0.41 m³. El alto valor de la dispersión absoluta de los datos observados (0.11 m³) se justifica por la gran amplitud de clases de diámetro de los árboles muestreados revelando una dispersión relativa (CV%) de 53.12%.

Análisis estadístico de los criterios de selección de los modelos matemáticos

El resultado de los 15 modelos probados para estimar el volumen total con corteza con sus coeficientes de regresión estimados y las estadísticas para la selección del mejor modelo se observa en el Cuadro 2.

Se observa en este cuadro que todos los coeficientes son significativos a un nivel de significancia de 5% ($p \leq 0.05$) y que todos los modelos presentan un buen ajuste, con valores para coeficientes de determinación ajustados entre 0.982 a 0.996 y valores para el error estándar de la estimación entre 0.013 a 0.045. Esto demuestra que las variables independientes utilizadas poseen un valor significativo en la descripción de la variable dependiente volumen total con corteza para la especie *P. taeda*, creciendo en el sur de Brasil.

Cuadro 2. Coeficientes de regresión estimados y criterios utilizados para determinar el volumen total con corteza de árboles de *P. taeda* en el sur de Brasil.

Nº	Coeficientes de regresión estimados						R^2 Aj ,	S_{yx}	CV%	F
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5				
1	-0.00199	0.000522					0.982	0.015	6.99	2213.5
2		-0.000101	0.0005230				0.996	0.015	7.00	5182.4
3	-0.04511	0.00475	0.0004018				0.983	0.014	6.92	1128.5
4	-7.82269	2.08323					0.985	0.045 *	-4.51	2602.4
5	-0.00198	6.65192					0.982	0.015	6.99	2213.9
6	-5.94173	1.60013	-8.32374				0.985	0.044 *	-4.41	1358.0
7	0.02355	0.0000320					0.983	0.014	6.81	2328.5
8	-0.04616	0.00671	0.0000216				0.985	0.013	6.33	1350.6
9	-0.03837	0.0003172	0.000011	0.0041			0.984	0.014	6.57	837.6
10		0.0004103	-0.000004	0.000027	-0.00018		0.996	0.013	6.47	3032.3
11	-0.08095	0.01631	-0.00034	-0.00045	0.000040		0.985	0.013	6.47	646.6
12	-0.04168	0.01206	-0.000231	-0.00012	0.000032	-0.0031	0.984	0.014	6.57	502.8
13	-9.11570	0.87382					0.985	0.045 *	-4.44	2678.2
14	-8.53018	1.90572	0.47121				0.986	0.043 *	-4.30	1433.5
15	-8.74174	3.03106	-0.1911	-0.5717	0.1895		0.986	0.044 *	-4.35	701.3

donde:

R^2 Aj . = coeficiente de determinación ajustado

S_{yx} = error estándar de la estimación

CV% = coeficiente de varianza

F = valor de F de la distribución de Snedecor;

* = valores del índice de Furnival (la variable dependiente de estos modelos es una variable transformada).

Un primer criterio revela que los coeficientes de determinación no se diferenciaron significativamente entre los modelos de una entrada (1 a 6) y los modelos de doble entrada (7 a 15). Este valor similar era esperado, puesto que los modelos de simple entrada ($v = f(d)$), asumen que árboles del mismo diámetro tienen la misma altura, lo que ocurre de forma regular en rodales coetáneos.

Se observa que la representación del ajuste es casi igual para los 15 modelos probados. Estos datos se deben en parte a la corta amplitud de clases de los diámetros que varió entre 10 cm hasta 30 cm, con una amplitud de 20 cm.

La selección de los modelos con base a la propuesta de Thiersch (1997), considera el valor ponderado obtenido del conjunto de resultados de cada estadístico (ver Cuadro 3).

Cuadro 3. Valor ponderado de los resultados de los parámetros estadísticos utilizados para determinar el volumen total con corteza de árboles de *P. taeda* en el sur de Brasil.

Modelo	Posición de los parámetros estadísticos			Valor ponderado
	$R^2 Aj$	S_{yx}	F	
1			7	17
2	1	4	1	6
3	5	3	11	19
4	3	7	4	14
5	6	4	6	16
6	3	6	9	18
7	5	3	5	13
8	3	2	10	15
9	4	3	12	19
10	1	1	2	4
11	3	1	14	18
12	4	3	15	22
13	3	7	3	13
14	2	5	8	15
15	2	6	13	21

Donde:

$R^2 Aj$ = coeficiente de determinación ajustado

S_{yx} = error estándar de la estimación

F = valor de F de la distribución de Snedecor.

El valor ponderado del cuadro 3 atribuyó valores de 1 a 15 para cada parámetro estadístico estimado considerando ($R^2 Aj$, S_{yx} , y F), siendo el modelo de regresión número 12 el peor y el modelo de número 10 el mejor modelo, demostrando un mejor ajuste del volumen total con corteza con relación al diámetro de referencia (dap) y la altura total (h).

El modelo número 10 de Näslund fue el modelo con mejor ajuste según el ranking (valor 4), pero es un modelo matemático complejo por presentar 4 coeficientes de regresión. Conociendo que no hay diferencia significativa entre los modelos de dos variables independientes, se decidió utilizar el modelo número 7 de Spurr con variable combinada, el cual presentó un valor ponderado de 13 con un error estándar de la estimación de 0.014 m³ con 6.81% de variación del volumen total con corteza disperso en relación a la media (ver cuadro 2). Se selecciona, por lo tanto, el modelo de Spurr con variable combinada ($v = \beta_0 + \beta_1 d^2 h + \varepsilon$) como el mejor modelo para estimar el volumen total con corteza para *P. taeda*, por ser un modelo más simple y fácil de calcular.

En seguida, son demostradas las representaciones gráficas de los seis modelos de regresión de una entrada utilizados para estimar el volumen total con corteza de *P taeda* L. (Figura 4).

Ajuste de modelos de una variable independiente (1 al 6)

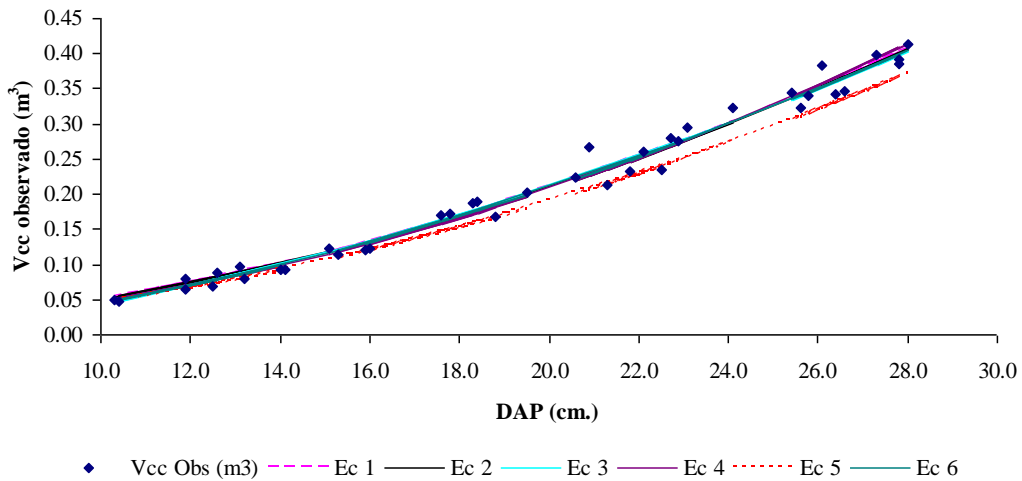


Figura 4. Representación gráfica de los volúmenes estimados por los seis modelos de una variable independiente.

donde:

Ec 1 = ecuación 1;...; Ec 6= ecuación 6.

En la Figura 5 se observa el gráfico en tres dimensiones mostrando la dependencia de las variables de entrada o variables independientes (diámetro a la altura del pecho de forma cuadrática y altura total de los árboles en el rodal).

MODELO DE SPURR VARIABLE COMBINADA

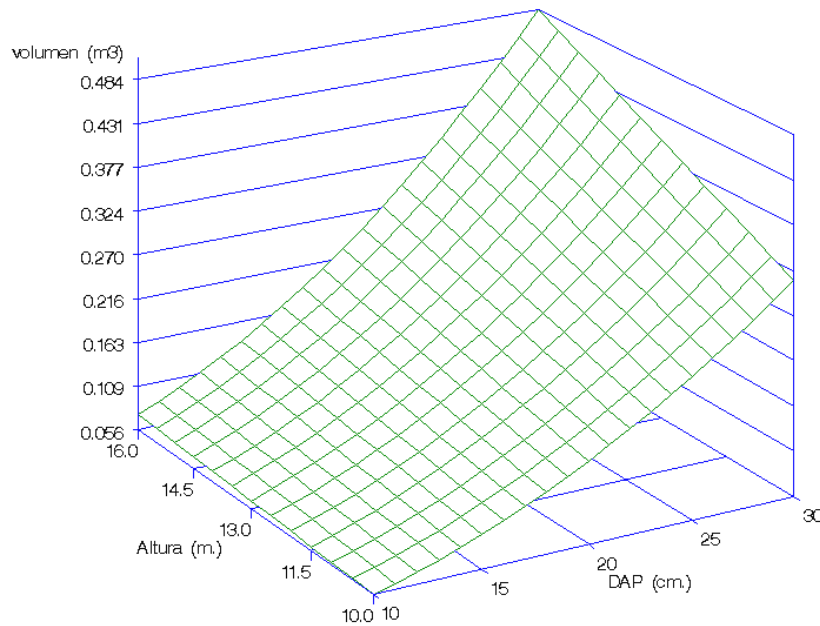


Figura 5. Representación gráfica del volumen estimado por el modelo matemático de regresión propuesto por Spurr.

Distribución gráfica de los residuos

En la Figura 6 se muestra el gráfico de los residuos del volumen total con corteza estimados por el modelo propuesto por Spurr, donde demuestra la no tendenciosidad de los puntos de la variable dependiente, un cierto equilibrio de los puntos en la parte de abajo y de arriba de la recta de referencia y una buena distribución del error a lo largo del eje de la variable estimada.

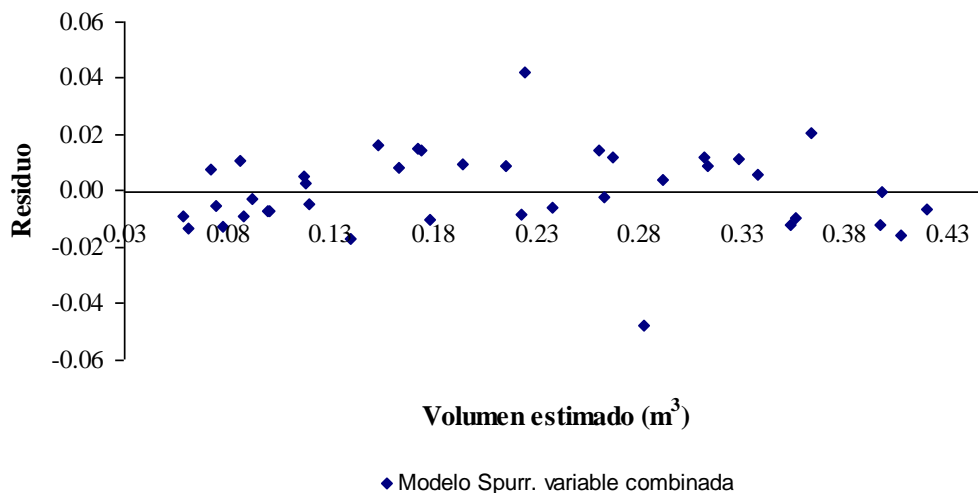


Figura 6. Gráfico de residuo del modelo matemático de regresión propuesto por Spurr.

En el análisis de la distribución de los residuos del modelo se observa una distribución homogénea de los datos hacia abajo, hacia arriba y sobre el eje de la ordenada. Este requisito es decisivo y de gran importancia para la confiabilidad de las estimaciones, ya que muestra que la misma no es tendenciosa.

Validación del modelo de regresión

Para la validación del modelo de regresión propuesto por Spurr todos los supuestos de validación fueron cumplidos, estos son:

- Normalidad en la distribución de los residuos ($P = 0.0574$), indicando que la distribución de los residuos obtenidos por la diferencia del volumen estimados de la muestra y el volumen estimado por la regresión no difieren de la distribución normal, de acuerdo con la prueba de Shapiro Wilk.
- Homogeneidad de varianzas por la prueba de chi-cuadrado propuesto por White, detectó que no hay diferencia significativa ($P = 0.2482$) entre varianzas.
- Independencia de los residuos, por la prueba de Durbin-Watson, indica que no existe correlación entre los residuos ($P = 0.1323$).

Por lo tanto, fue seleccionado el modelo propuesto por Spurr con variable combinada de diámetro a la potencia 2 (cm) y altura total (m), para estimar el volumen total con corteza de árboles de *P. taeda* L. en el sur de Brasil

$$V_i = 0,02355 + 0,0000320d_i^2 h_i + \varepsilon_i$$

donde:

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ árboles

V_i = se refiere al volumen total en m^3 observado en el i -ésimo árbol

$d_i^2 h_i$ = diámetro (cm) a la potencia 2 del i -ésimo árbol por la altura total (m) del i -ésimo árbol

ε_i = efecto aleatorio asociado con la i -ésima observación \cong NIID $(0, \sigma^2)$

CONCLUSIONES

El análisis de los parámetros estadísticos mediante el valor ponderado, juntamente con la observación gráfica de los residuos resultantes del ajuste de los modelos matemáticos para la estimación del volumen total con corteza de *P. taeda*, permite concluir que para el conjunto de datos utilizados, es posible utilizar cualquiera de los quince modelos probados en las condiciones actuales del rodal, pero se recomienda la utilización de los modelos de doble entrada por representar un estimado de mayor confiabilidad, debido a la introducción de la variable altura, puesto que los modelos de una entrada asumen que esta variable permanece constante para determinado diámetro.

De los quince modelos probados, se propone el uso del modelo de Spurr con variable combinada, pues el mismo presenta el mejor ajuste para los valores observados y estimados de volumen total con corteza del rodal de *P. taeda* estudiado.

BIBLIOGRAFÍA

- Bussab, WO. 1986. Análise de variância e de regressão. **Métodos Quantitativos V.7**. São Paulo, BR, Atual. 147 p.
- Dauber, E. 2001. Tablas volumétricas del fuste aprovechable de diferentes especies con base en mediciones de trozas en el rodeo y aserradero. Documento técnico 101/2001. Santa Cruz, BO, Chemonics International Inc -USAID/Bolivia. p. irr.
- Furnival, G. 1961. An index for comparing equations used in constructing volume tables. *Forest Science*. 7(4):337-341.
- Hosokawa, RT; Souza, AL. 1989. Aplicações de relações hipsométricas e equações de volume em manejo. Brasília, BR, ABEAS. 43 p.
- Loetsch, F; Zöhner, F; Haller, KE. 1973. Forest inventory. Vol. II. Munich, GE, BLV Verlagsgesellschaft. 469 p.
- Machado, SA; Conceição, MB; Figueiredo, DJ. Modelagem do volume individual para diferentes idades e regimes de desbaste em plantações de *Pinus oocarpa*. *Ciências Exatas e Naturais*. 4(2):185-196.
- Moreno, JA. 1961. Clima do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, BR, Secretaria da Agricultura-RS. 41 p.
- Prodan, M. 1968. Forest biometrics. Oxford, UK, Pergamon Press. 447 p.
- Santana, OA; Encinas, JI. 2004. Equações volumétricas para uma plantação de *Eucalyptus urophylla* destinada a produção de lenha. In Simpósio Latino-Americano Sobre Manejo Florestal, (3º, Santa Maria, BR). 2004, Santa Maria, BR, Universidade Federal de Santa Maria. p. 107-111.
- SAS Institute. 2009. The SAS System for Windows - release 8.02. Cary, US, SAS Institute Inc. Consultada 20 oct. 2009. Disponible en <http://the-sas-system-for-windows.software.informer.com/>.
- Schneider, PR. 1984. Betriebswirtschaftliche und ertragskundliche Grundlagen der Forsteinrichtung in Südbrasilien am Beispiel von *Pinus elliottii*. Tesis Ph.D. Freiburg, GE, Albert-Ludwigs-Universität. 190 p.
- Spurr, SH. 1952. Forest Inventory. The Ronald Press Company. New York. 476 p.
- Thiersch, A. 1997. A eficiência das distribuições diamétricas para prognose da produção de *Eucalyptus camaldulensis*. Mestrado em Engenharia Florestal. Lavras, BR, Universidade Federal de Lavras. 155 p.
- Villarroel, L. 1994. Aplicación de la regresión ponderada en la construcción de tablas de volumen (*Eucalyptus globulus* y *Pinus radiata*). Cochabamba, BO, Programa de repoblamiento forestal. CORDECO. 22 p.